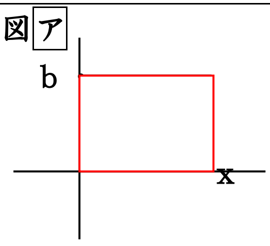
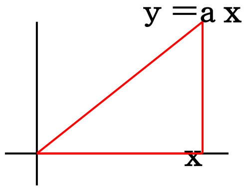
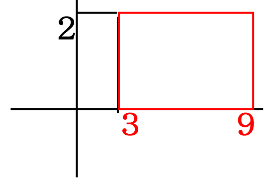
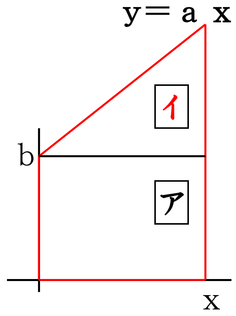
中学一年からの微積分入門

微分積分が難しいわけではない．教科書の**本論は少し**．課題は前の学年との繋がり．

学年	関数&変化	高さから面積へ（赤枠の中の面積）	文字式	表記法の先取り
中学1年	y は高さ ア　$y=2$ イ　$y=3$ ウ　$y=4$ $\boxed{y=b}$ カ　$y=x$ キ　$y=2x$ ク　$y=3x$ ケ　$y=4x$ コ　$y=5x$ $\boxed{y=ax}$	図ア  面積 $=\boxed{タテ}\times\boxed{ヨコ}$ $=\boxed{b}\times\boxed{x}$ 図イ $y=ax$  $\boxed{底辺}\times\boxed{高さ}\div\boxed{2}$ $=\boxed{X}\times\boxed{aX}\div\boxed{2}$	S は面積 あ　$S=2x$ い　$S=3x$ う　$S=4x$ $S=bx$ か　$S=\frac{1}{2}x^2$ き　$S=x^2$ く　$S=\frac{3}{2}x^2$ け　$S=2x^2$ こ　$S=\frac{5}{2}x^2$ $\boxed{S=\frac{a}{2}x^2}$	**積分の記号の一部は** 中学１年領域でも使える． $S(x)=2x$ **赤枠の中の面積**  **これを** $\Big[2x\Big]_3^9$ $=2\times9-2\times3$ と約束すれば **高校数学Ⅱ風，** $\Big[2x^2\Big]_3^9$ $=2\times9^2-2\times3^2$
中学2年	サ　$y=x+1$ シ　$y=2x+1$ ス　$y=3x+2$ セ　$y=4x+3$ ソ　$y=5x+4$ $\boxed{y=ax+b}$ $\boxed{y=ax+b}$ の mからnまでの $\boxed{変化の割合}=\frac{yの増加量}{xの増加量}=$ $\frac{(an+b)-(am+b)}{n-m}$ $=\frac{an-am}{n-m}=\frac{a(n-m)}{n-m}$ $=a$ この時$\boxed{変化の割合}$は変化しない．	上記図$\boxed{ア}$と図$\boxed{イ}$の結合 $y=ax+b$  $\boxed{イ}=\boxed{X\times aX\div2}$ $\boxed{ア}=\boxed{b\times X}$ $\boxed{全体ウ}=\boxed{イ}+\boxed{ア}$	さ　$S=\frac{1}{2}x^2+x$ し　$S=x^2+x$ す　$S=\frac{3}{2}x^2+2x$ せ　$S=2x^2+3x$ そ　$S=\frac{5}{2}x^2+4x$ $\boxed{S}=\boxed{\frac{a}{2}x^2+bx}$	$\boxed{y=f(x)}$ **高校数学Ⅰで学ぶ上の式** は中学で使うと便利である． $f(x)=ax+b$ における m から n までの **変化の割合** $=\frac{f(n)-f(m)}{n-m}$ $=\frac{(an+b)-(am+b)}{n-m}$ $=a$

微分・積分の学習は，殆どが中学数学のテーマで考えることが出来る．

中学一年からの微積分入門

微分積分が難しいわけではない．教科書の**本論は少し**．課題は前の学年との繋がり．

中学3年

関数&変化

$y=mx^2$ の

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

＝**変化の割合**

は**変化する**

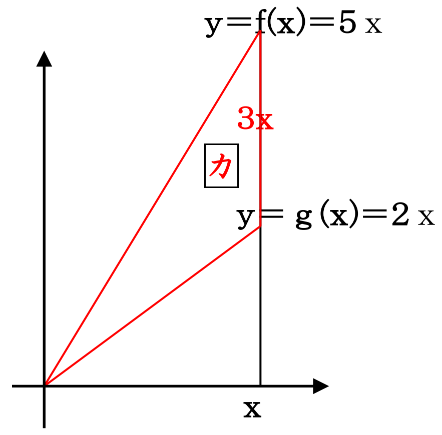
数学Ⅱの

平均変化率につながる

（赤枠の中の面積）

中学１年で可能な問題

赤い線で囲まれた面積



底辺＝$5x-2x=3x$

高さ＝x

面積＝$3x\times x\div 2$

すなわち

$$S=(f(x)-g(x))\times x\div 2$$

一般式に入る前に
具体例でイメージを作ることが
意味を理解する上で大切であろう

文字式

２次方程式を
① **因数分解**で解く
② **平方完成**の形で解く
③ **解の公式**

何故次のような式の変化となるか
「理解」しておかなければ
「出来る」けれども「分からない」
「面白くもない数学」となる

$ax^2+bx+c=0$ ならば

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

積分の問題などで，
交点を求めるために
２次方程式を解くことがある
解の公式を使えると
確認するのに便利．

表記法の先取り

$y=mx^2$ における

a から b までの

変化の割合

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$=\frac{mb^2-ma^2}{b-a}$$

$$=\frac{m(b^2-a^2)}{b-a}$$

$$=\frac{m(b-a)(b+a)}{b-a}$$

$$=m(a+b)$$

数学Ⅰ

関数&変化

何故次のような式の変化となるか
「理解」しておかなければ
「出来る」が「分からない」となる．

$$y=ax^2+bx+c$$

$$=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b-4ac}{4a}$$

解の公式と似ていて
混乱しやすいので注意が必要．

積分の問題によっては
関数の上下を見るためのグラフを
描くときに必要なことがある．

$y=|f(x)|=|x-1|$

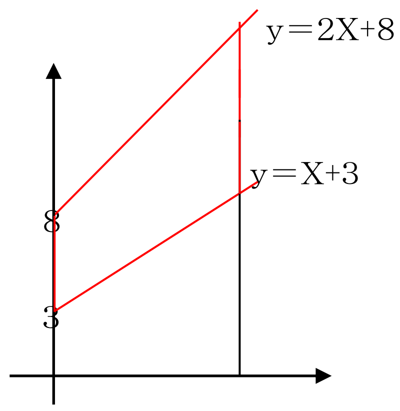
のグラフを描く時，

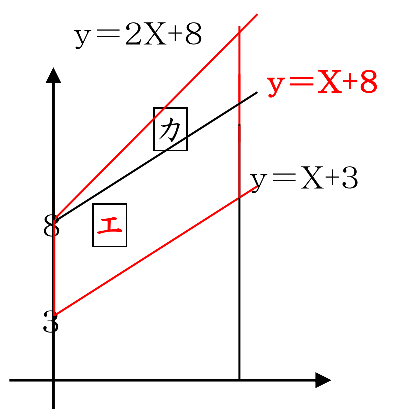
$x-1\geqq 0$ のとき，
$|x-1|=x-1$

$x-1\leqq 0$ のとき，
$|x-1|=-(x-1)=-x+1$

と f(x)の正負で分ける．

全てが同じではないが，
上の図ア　イ　ウ&カを参照．





ウでは
長方形の面積としたものが
ここでは，
平行四辺形の面積エと見る．

一般式

ア $(x+b)^2-x^2$
$=2xb+b^2$

イ $(x+b)^3-x^3$
$=3x^2b+3xb^2+b^3$

ウ $(x+b)^4-x^4$
$=4x^3b+6x^2b^2+4xb^3+b^4$

カ $(x+h)^2-x^2$
$=2xh+h^2$

キ $(x+h)^3-x^3$
$=3x^2h+3xh^2+h^3$

ク $(x+h)^4-x^4$
$=4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4$

備考

左の式の

ア，イ，ウの **b** を

h に置き換えると

左の下の式

カ，キ，クとなる．

左の式カ，キ，クを
それぞれ h でわると

サ　$2x+h$
シ　$3x^2+3xh+h^2$
ス　$4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3$

となる．

上の式の **h** が
限りなく 0 に近づくとき
それぞれ次の値に
限りなく近づく

タ　$2x$

チ　$3x^2$

ツ　$4x^3$

中学一年からの微積分入門

微分積分が難しいわけではない．教科書の**本論は少し**．課題は前の学年との繋がり．

変化の割合

数学Ⅱ 微分

平均変化率 →微分する

ある値 $\mathbf{p}$ からの

X の増加量 h を

0 に近づけると，

平均変化率は

一定の値に近づく

ア 一次関数 ax＋b の場合は

$$\frac{\{a(p+h)+b\}-\{ap+b\}}{h}=a$$

p＆h の大きさに関係なく，

変化しない

カ

$$\{(p+h)^2-p^2\}/h$$

$$=2p+h$$

サ

$$\{(p+h)^3-p^3\}/h$$

$$=3p^2+3ph+h^2$$

上の式は

h が限りなく 0 に近づくと

それぞれ h を含まない式

となる．

ア	カ	サ	タ
a	2p	$3p^2$	$4p^3$

微分係数と呼ばれる

それは，点 p における

接線の傾きを表す．

微分係数 →導関数

左記の**ある値 p** を

変数 x とすると

導関数が求まる．

即ち，（ただし c は定数）

イ

$x+c$ の微分＝ 1

キ

x^2+c の微分＝$2x$

シ

x^3+c の微分＝$3x^2$

一般に

（c は定数）

x^m+c

の微分

$=mx^{m-1}$

導関数の一般式

ウ

$2x+c$ の微分＝ 2

$3x+c$ の微分＝ 3

$ax+c$ の微分＝ a

ク

$2x^2+c$ の微分＝$4x$

$3x^2+c$ の微分＝$6x$

ax^2+c の微分＝$2ax$

ス

$2x^3+c$ の微分＝$6x^2$

$3x^3+c$ の微分＝$9x^2$

ax^3+c の微分＝$3ax^2$

一般に

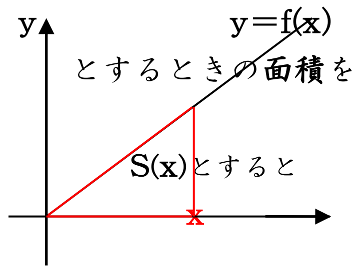
（c は定数）

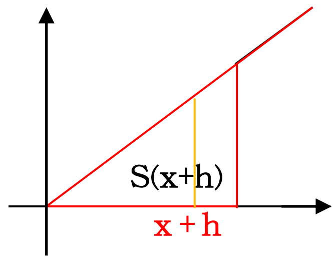
ax^m+c

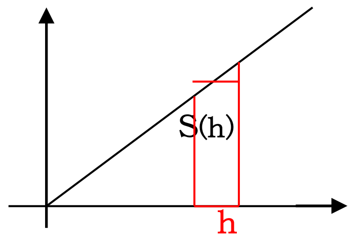
の微分

$=max^{m-1}$

面積を微分して 高さへ（略記）

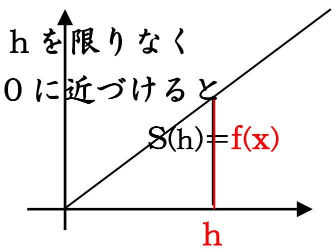






h を限りなく

0 に近づけると



面積を微分すると

高さが求められる．

それは，

関数 **f(x)** である．

2 次以上についても

同様の図式が成り立つ．

中学一年からの微積分入門

微分積分が難しいわけではない．教科書の**本論は少し**．課題は前の学年との繋がり．

数学Ⅱ 積分

不定積分

微分の逆を**積分する**と名付ける

微分の逆＝不定積分

1 の積分	＝	x＋c
2 の積分	＝	2x＋c
3 の積分	＝	3x＋c
a の積分	＝	ax＋c

x の積分	＝	$\frac{1}{2}x^2+c$
2x の積分	＝	x^2+c
3x の積分	＝	$\frac{3}{2}x^2+c$
4x の積分	＝	$2x^2+c$
ax の積分	＝	$\frac{a}{2}x^2+c$

x^2 の積分	＝	$\frac{1}{3}x^3+c$
$2x^2$ の積分	＝	$\frac{2}{3}x^3+c$
$4x^2$ の積分	＝	$\frac{4}{3}x^3+c$
ax^2 の積分	＝	$\frac{a}{3}x^3+c$

ax^m の積分

$$=\frac{a}{m+1}x^{m+1}+c$$

積分は，（略して言うと）

m＋1分(ぶん)の m＋1乗(じょう)

となる．

面積を微分して高さだから 高さを積分して面積

高さ	面積
1	x
2	2x
3	3x
a	ax

高さ	面積
x	$\frac{1}{2}x^2$
2x	x^2
3x	$\frac{3}{2}x^2$
ax	$\frac{a}{2}x^2$

ここまでは中学１年２年を参照．

高さ	面積
x^2	$\frac{1}{3}x^3$
$2x^2$	$\frac{2}{3}x^3$
$3x^2$	x^3
ax^2	$\frac{a}{3}x^3$

一般式で考える

面積を微分すると，
ｆ(ｘ)＝高さとなる．
それゆえ，
高さの関数を元に
微分の逆を行うと
面積が求められる．
（ニュートン）

S(x)を面積とすると

S’(x)は面積の微分

⇓

S’(x)＝ f (x)とすれば

f (x)の原始関数である

F(x)は面積．

上のことを
表的に表すと

$$\begin{array}{ccc} S(x) & \rightarrow & S'(x) \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ F(x) & \leftarrow & f(x) \end{array}$$

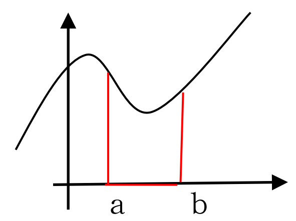
但し，上記の記号の意味は

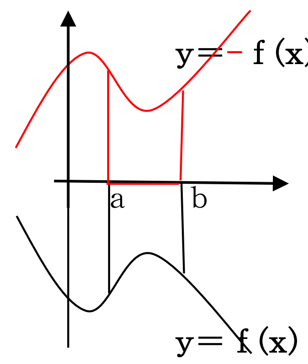
→ 微分する

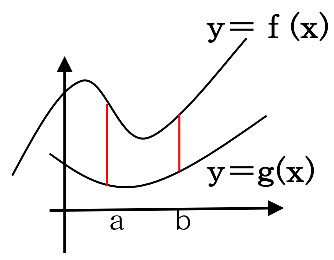
← 微分の逆 を積分と名付けられる

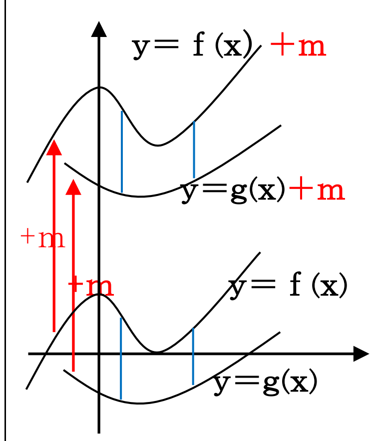
⟹ は**等しい**

積分して面積 が求まる（略記）









f(x)－g(x)

＝{ f(x) ＋m }－{g(x)＋m}

＝f(x)－g(x)

上の流れをまとめて，少し延ばすと次のような感じになる．

右方向へは微分
左方向へは積分

	原始関数 F(x)	関数 f(x)	導関数 f’(X) 傾き
体積 V(X)	面積 S(x)	高さ S’(x)	