次の計算をせよ．

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}+1)$ | $5+4\sqrt{2}$ | | $(\sqrt{2}+1)^2$ | $3+2\sqrt{2}$ |
| $(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}+1)$ | $6+4\sqrt{3}$ | | $(\sqrt{3}+1)^2$ | $4+2\sqrt{3}$ |
| $(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}+2)$ | $11+5\sqrt{5}$ | | $(\sqrt{5}+2)^2$ | $9+4\sqrt{5}$ |
| $(\sqrt{6}+3)(\sqrt{6}+2)$ | $12+5\sqrt{6}$ | | $(\sqrt{6}+1)^2$ | $7+2\sqrt{6}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}-1)$ | $5-4\sqrt{2}$ | | $(\sqrt{2}-1)^2$ | $3-2\sqrt{2}$ |
| $(\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}-1)$ | $6-4\sqrt{3}$ | | $(\sqrt{3}-1)^2$ | $4-2\sqrt{3}$ |
| $(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}-2)$ | $11-5\sqrt{5}$ | | $(\sqrt{5}-2)^2$ | $9-4\sqrt{5}$ |
| $(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}-2)$ | $12-5\sqrt{6}$ | | $(\sqrt{6}-1)^2$ | $7-2\sqrt{6}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-1)$ | $2\sqrt{3}$ | | $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$ | $1$ |
| $(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-1)$ | $2+2\sqrt{5}$ | | $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$ | $2$ |
| $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-2)$ | $3-\sqrt{5}$ | | $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$ | $1$ |
| $(\sqrt{6}+3)(\sqrt{6}-2)$ | $\sqrt{6}$ | | $(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)$ | $2$ |

**連続する３つの整数の**
**大きい整数の２乗から**
**小さい整数の２乗を引くと**
**４の倍数になる。.**

$(n+1)^2 -(n-1)^2$

$=(n^2+2n+1)-(n^2-2n+1)$

$=4n$

連続する３つの整数の
中間の数の２乗は，
大きい整数と小さい
整数の積に
１を加えた数と同じ.

$n^2=(n-1)(n+1)+1$

連続する奇数の
大きい整数の２乗から
小さい整数の２乗を引くと
４の倍数になりそう.

$(2n+1)^2-(2n-1)^2$

$=(4n^2+4n+1)-(4n^2-4n+1)$

$=8n$

連続する２つの偶数の
それぞれの数の
２乗の和は，
どうなるか.

$(2n)^2+\{2(n+1)\}^2$

$=4n^2+(4n^2+4n+2)$

$=8n^2+4n+2$

**因数分解**しなさい。

$(2n-1)^2-(2m-1)^2$

$=(4n^2-4n+1)-(4m^2-4m+1)$

$=4n^2-4n+1-4m^2+4m-1$

$=4n^2-4m^2-4n+4m$

$=4(n^2-m^2)-4(n-m)$

$=4(n-m)(n+m)-4(n-m)$

$=4(n-m)(n+m+1)$

上のことから

どのようなことが言えるか

異なる２つの奇数の

２乗の差は

８の倍数となる。

次のことを説明しなさい。

連続する２つの自然数の２乗の和は奇数である。

$n^2+(n+1)^2$

$=2n^2+2n+1$

連続する２つの偶数の２乗の和は２の倍数である。

$(2n)^2+\{2(n+1)\}^2$

$=4n^2+(4n^2+4n+2)$

$=4(2n^2+n)+2$

連続する２つの自然数の２乗の差はその２数の和に等しい。

$(n+1)^2-n^2$

$=2n+1$

$=n+(n+1)$

連続する２つの偶数の２乗の差は４の倍数である。

$\{2(n+1)\}^2-(2n)^2$

$=8n+4$

連続する３つの自然数の真ん中の数の２乗と両端の数の積との差は常に１である。

$(n+1)(n-1)$

$=n^2-1$

連続する２つの奇数の２乗の和は２の倍数である。

$(2n+1)^2+(2n-1)^2$

$=(4n^2+4n+1)+(4n^2-4n+1)$

$=8n^2+2$

連続する３つの自然数の大小２数の２乗の差は４の倍数である。

$(n+1)^2-(n-1)^2$

$=(n^2+$

連続する２つの奇数の２乗の差は８の倍数である。

$(2n+1)^2-(2n-1)^2$

$=(4n^2+4n+1)-(4n^2-4n+1)$

$=8n$

２つの**奇数**の
２**乗の差**は
８**の倍数**である。

$$(2n-1)^2-(2m-1)^2$$
$$=4(n+m-1)(n-m)$$

| | |
|---|---|
| n－m が | 偶数のとき |
| n+m は | 偶数であり |
| n+m－1 は | 奇数である。 |

| | |
|---|---|
| n－m が | 奇数のとき |
| n+m は | 奇数であり |
| n+m+1 は | 偶数である。 |

よって、

$(n+m-1)$ か

$(n-m)$

のどちらか一方が
必ず偶数になるので、

$4(n+m-1)(n-m)$ は

4×（偶数）（奇数）か

4×（奇数）（偶数）となる。

よって、

**８の倍数**となる。

**連続**する３つの整数の
**真ん中**の数の平方は
**他の２数の積**より
いくつ大きいか．

**3，4，5 の場合．**

$4^2=16$
$3\times5=15$
**１大きい**

他の数ではどうか
**4，5，6 の場合．**

$5^2=25$
$4\times6=24$
**１大きい**

いつも言えるだろうか．
文字式で表してみる．

真ん中の数を n
小さい方を n－1
大きい方を n＋1
とすると，
$(n-1)(n+1)=n^2-1$
**$n^2$ より１小さいと**
**常に言える．**

n が**整数**の時
$n^2+n$ は
常に 2 で割り切れる

n が奇数の時
$n^2$ は奇数

$n^2+n$
＝奇数＋奇数
＝偶数
よって２で割り切れる

n が偶数の時
$n^2$ は偶数
$n^2+n$
＝偶数＋偶数
＝偶数
よって２で割り切れる

**奇数の平方の差**は
**何**の**倍数**か．

$(2n+1)^2-(2m-1)^2$
$=4n^2+4n+1$
$-(4m^2-4m+1)$
$=4(n^2-m^2+n-m)$
$=4\{(n+m)(n-m)-(n-m)\}$
$=4\{(n-m)(n+m-1)\}$

ここで，

が偶数ならば

(n＋m－1 は奇数

(n－m)が奇数ならば

(n＋m－1 は偶数

どちらかが必ず偶数になるので，

4×偶数×奇数
＝8の倍数×奇数
＝8の倍数

１辺 6m の正方形の畑がある．
一方の辺を 2m **短く** し
もう一方の辺を 3m **長く** すると
面積はどう変化するか．

元の正方形の面積は
$6\times6=36\ (m^2)$

変化した面積は
$(6-2)(6+3)=36\ (m^2)$

同じである．
では，
正方形の
タテを 2m **短く** し
ヨコを 3m **長く** すれば
面積は変わらないのだろうか．

正方形の一辺の長さを
12m にしてみよう．

元の正方形の面積は
$12\times12=\boxed{144}\ (m^2)$

変化した面積は
$(12-2)(12+3)=150\ (m^2)$

**同じではない**．では，
面積が変わらないようにするには
何メートル短くし，
何メートルながくすればよいか
考えてみよう．

タテを 3m **短く** し
ヨコを 4m **長く** すればどうなるか．
$(12-3)(12+4)=\boxed{144}\ (m^2)$

等しくなった．では，
短くした長さより
長くする辺を 1m ながくすれば
よいのだろうか．

１辺 10 メートルの正方形の畑がある．
一方の辺を 2m 短くし
もう一方の辺を 3m 長くすると
$(10-2)\{10+3\}=101$

予想は外れた・．

では，
どのような数であれば
元の面積と等しくなるのか．

$(x-a)(x+b)$

$=x^2+(b-a)x-ab$

であるから

$+(b-a)x-ab=0$

**ならば，元の面積に等しくなる．すなわち、**

$(b-a)x=ab$

$x=\boxed{\dfrac{ab}{b-a}}$

であるはず．とすれば，
この式では，

**x** m から考えるのは難しいが

短くする長さを **a**m

長くする長さを **b**m とすると
正方形の一辺が
$\boxed{\dfrac{ab}{b-a}}$**メートルであれば**
面積は変化しない．

## 同心円の間の面積

半径 r ㍍の円形の土地

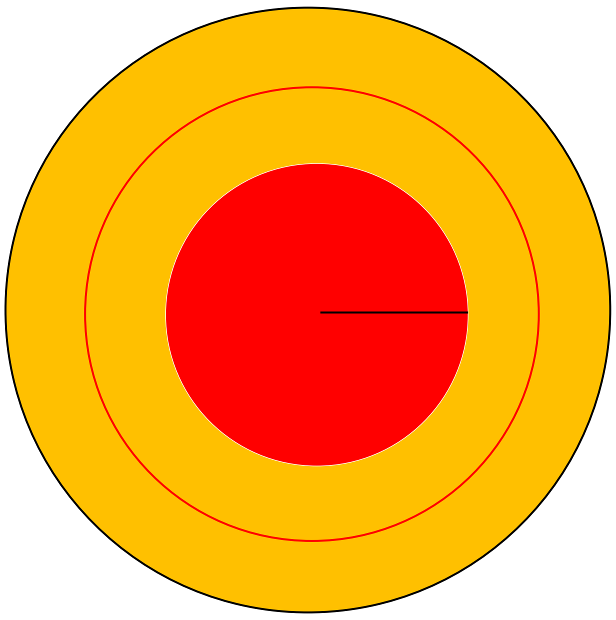
の周りに

幅 2a ㍍の道をつけた．

この道の面積は

道の真ん中を通る線(中線)と幅の積

に等しいことを説明せよ．



大きい円の面積から小さい円の面積を引けば

道の面積が求められる。

$\pi(r+2a)^2-\pi r^2$

$=\pi(r^2+4ar+4a^2\pi)-\pi r^2$

$=\pi r^2+4\pi ar+4\pi a^2-\pi r^2$

$=\boxed{4\pi ar+4\pi a^2}$

一方、中線と幅をかけてみる。

中線は $\boxed{半径\ r+a}$ の円周であるから、

$2\pi(r+a)$ であり、

これに幅 2a をかけると

$4\pi a(r+a)=\boxed{4\pi ar+4\pi a^2}$

となり一致する。

このことは，

いちばん内部の円の半径をゼロとすると，

**円の面積**は，一般に

**半径の半分×中央線**

として求められることを示す．

このことを説明せよ．

半径を r とすると，

円の面積は $\pi r^2$　　また一方

中線が示す円の半径は $\frac{r}{2}$ である．

その円周（中線）は

$2\times\pi\times\frac{r}{2}=\pi r$

幅は，r であるから，

中線の長さ×幅

$=\pi r\times r$

$=\pi r^2$ である

すなわち

ふつうの円の面積の公式と

中線の長さ×幅は

$\pi r^2$ で一致する。は

さらに，

**三角形の面積**は，一般に

**底辺×高さ÷2**

として求められるが，

**中線×高さ**

**＝三角形の面積**

としても求められる．これを説明せよ．

更にさらに，

台形の面積も

**中線×高さ**

**＝台形の面積**

としても求められる．これを説明せよ．