地球上で，どこか高い所から
物を落とすと
おおよそ，ｔを秒数として

$5t^2$

の速さで落下する．

次の表を完成させなさい．

落下時間	求める式	落下距離(m)
１秒後	$5\times\boxed{1}^2$	5
２秒後	$5\times\boxed{2}^2$	20
３秒後	$5\times\boxed{3}^2$	45
４秒後	$5\times\boxed{4}^2$	80
５秒後	$\boxed{5\times5^2}$	125
10 秒後	$\boxed{5\times10^2}$	500
20 秒後	$\boxed{5\times20^2}$	2000

地球上で物を投げ上げると
最初の速さのおおままで進もうとするが
地球の引力のため
ｔ秒後には約 $5t^2$m だけ下に落ちる．
その和が物体の高さである．

秒速 20m で物を投げ上げた時の
地面に落ちるのは何秒後か．.

ｔ秒後の高さは次のとおりである．
次の表を完成させなさい．

落下時間	求める式	落下距離(m)
１秒後	20×1 -5×1^2	25
２秒後	20×2 -5×2^2	20
３秒後	20×3 -5×3^2	15
４秒後	20×4 -5×4^2	0
５秒後	20×5 -5×5^2	-25
ｔ秒後	$20t$ $-5t^2$	

$\boxed{4}$ **秒後**に地面に落ちる．

秒速 40m で物を打ち上げた時

地面に落ちるのは何秒後か．

$40t-5t^2=0$

これは等式であるから，

両辺を -5 で割って

$t^2-8t=0$

$t(t-8)=0$

よって８秒後．

また、最も高くなるのは４秒後で

80m まで上がるか。

確かめなさい。

ある花火は

600m の高さまで上がるという．

秒速何 m で打ち上げたのか．

これはどう考えるとよいだろうか．

ｔ秒後の高さは

$600=$初速$\times t-5t^2$

イ

ある２数の**和は５**で
積は６であるという．
この２数を求めなさい．

ある２数，２と３がある．
これの和は５，積は６である．

これを，
和は５，積は６である
ということが分かっていて，
２と３が不明のとき，
どのようにして求めたらよいか，
が題意である．

２数を a,b とすると，

$$\begin{cases} a+b=5 & \cdots\cdots\cdots① \\ ab=6 & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

これを解いて
① より，$b=5-a$………①'
② に①'を代入して，

$a(5-a)=6$

$5a-a^2-6=0$

$-a^2+5a-6=0$

$a^2-5a+6=0$

$(a-2)(a-3)=0$

$a=2$ or 3

$b=3$ or 2

上のような数の問題ならば，
適当に数字をあてはめていっても
a,b が求められる．

しかし，
次のような問題の時は，
それは不可能である．
つまり，
方程式を解く形の解法が
問題の解決につながる例である．

ある２数の**和は10**で
積は20であるという．
この２数を求めなさい．

２数を a,b とすると，

$$\begin{cases} a+b=10 & \cdots\cdots\cdots① \\ ab=20 & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

①より、$b=a-10$　これを②に代入して

$a(10-a)=20$

$10a-a^2-20=0$

$-a^2+10a-20=0$

$a^2-10a+20=0$

これを解いて

$a=5\pm\sqrt{5}$

「数字をあてはめて解く方法」では
ちょっと正解には至らないですね．

ある２数の**差は１**で
積は６であるという．
この２数を求めなさい．

アと同じように，
２数が２と３の時，
その差は１であり，
その積は６である．

これを
方程式で解いてみる．

２数を $a>b$ とすると，

$$\begin{cases} a-b=1 & \cdots\cdots\cdots① \\ ab=6 & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

① より，$b=a-1$………①'
③ に①'を代入して，

$a(a-1)=6$

$a^2-a-6=0$

$(a-3)(a+2)=0$

$a=3$ のとき，$b=2$

$a=-2$ のとき，$b=-3$

和が５の時の解とは
ちょっと様子が違う．
つまり，
数字をあてはめて考えると
正解に至ったようで，
じつは十分な解に至っていない
場合がある．

方程式で解くことは
意外な事実を知らせてくれる
のである．

連続する３つの整数がある．いちばん大きい数の平方は他の２数の平方の和に等しいという．

３つの整数をもとめよ．

例えば，

３，４，５

のような連続する整数がある．
この場合，

$3^2+4^2=5^2$

が成り立つ．
これで十分だろうか．

いちばん小さい数をｎとして，
立式すると，

$n^2+(n+1)^2=(n+2)^2$

これを解いて，

$n^2-2n-3=0$

$(n-3)(n+1)=0$

n-3 ＝0 の時，３，４，５

n+1 ＝0 の時，−1，０，１

２通りの解があったのだ．

対角線が44本引けるｎ角形がある．

この多角形は何角形か．

多角形の対角線の数え方の一つ．

ア　１つの頂点から n-3 本引ける

イ　頂点は□個ある．

ウ　上の方式で数えると $n(n-3)$ 本の対角線があることになる．

しかし，

エ　上の方式の数え方では１本の対角線を２回ずつ数えることになるので

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

では，順に対角線の数を求めてみよう．

三角形	$\frac{3(3-3)}{2}=0$
四角形	$\frac{4(4-3)}{2}=2$
五角形	$\frac{5(5-3)}{2}=5$
六角形	$\frac{6(6-3)}{2}=9$
七角形	$\frac{7(7-3)}{2}=14$
八角形	$\frac{8(8-3)}{2}=20$
九角形	$\frac{9(9-3)}{2}=27$
十角形	$\frac{10(10-3)}{2}=35$

これでは時間がかかり過ぎます．
一気に求める方法を考えましょう．

$\frac{n(n-3)}{2}=44$　とおくと，

多角形と言っているので
ｎは自然数のはずです．
因数分解してみましょう．

$n(n-3)=88$

$n^2-3n-88=0$

$(n-11)(n+8)=0$

$n=-8$

というのは成り立ちませんから捨てて，

11 角形であることが分かります．

ヨコがタテより 10 cm長い
長方形の紙がある．
この４隅から
１辺が４cmの正方形を切り取って
直方体の容器をつくったら
容積が 96 cm^3 になった．
初めの長方形のタテとヨコの長さを
求めなさい．

タテを x cmとすると，
ヨコは（x+10）cm
容積は
タテ×ヨコ×高さ＝容積

$(x-4\times2)(x+10-4\times2)\times4=96$

$4(x-8)(x+2)=96$

$(x-8)(x+2)=24$

$x^2-6x-16=24$

正方形の一辺の
タテを **2 cm短く** し，
ヨコを **3 cm長く** した．
このとき，
面積は変わらなかった．
もとの正方形の一辺の長さを求めよ．

一辺の長さを 3 cmとすると，
元の面積は 9 cm^2，
新しい長方形の面積は(3−2)(3+3)
で 6 cm^2，
同じにならない．**その差** 3 cm^2．

一辺の長さを 4 cmとすると，
元の面積は 16 cm^2，
新しい長方形の面積は(4−2)(4+3)
で 14 cm^2，
同じにならない．**その差** 2 cm^2．
でも少し近づいた．

一辺の長さを 5 cmとすると，
元の面積は 25 cm^2，
新しい長方形の面積は(5−2)(5+3)
で 24 cm^2，
同じにならない．**その差** 1 cm^2．
あと一歩に近づいた．

一辺の長さを 6 cmとすると，
元の面積は 36 cm^2，
新しい長方形の面積は(6−2)(6+3)
で 36 cm^2，
同じになった．

しかし，この方法では
数字がややこしいときには
とても求められない．

正方形の一辺の長さを x cmとし，
等式につくると，

$$x^2=(x-2)(x+3)$$

$x^2=x^2+x-6$

$$x=6$$

一気に **6 cm** が求まる．
方程式の便利なところである．

正方形の一辺の
タテを 3 cm**短く**し，
ヨコを 4 cm**長く**した．
このとき，
面積は変わらなかった．
もとの正方形の一辺の長さを求めよ．

正方形の一辺の長さを x cmとし，
等式につくると，

$$x^2=(x-3)(x+4)$$

$x^2=x^2+x-12$

$$x=12$$

一気に **12 cm** が求まる．
方程式は便利である．

正方形の一辺の
タテを 4 cm**短く**し，
ヨコを 5 cm**長く**した．
このとき，
面積は変わらなかった．
もとの正方形の一辺の長さを求めよ．

正方形の一辺の長さを x cmとし，
等式につくると，

$$x^2=(x-4)(x+5)$$

$x^2=x^2+x-20$

$$x=20$$

一気に **20 cm** が求まる

ところで，諸君は気づいただろうか．
面積が変わらないのは
タテを 2 cm**短く**，ヨコを 3 cm**長く**した時は，．
6 cm
タテを 3 cm**短く**，ヨコを 4 cm**長く**した時は，．
12 cm
タテを 4 cm**短く**，ヨコを 5 cm**長く**した時は，．
20 cm
二つの長さのせきになっている．
いつもそうだろうか．

そのようなことを考えても
特にどうってことはないことが
多いものである．

しかし，
そういう注意深さは
何かの発見につながるものだから，
大いに楽しんでほしいとおもう．

短くした長さと長くした長さの差が
1 cmになっている．

差を 2 cmにしてみよう．

正方形の一辺の
タテを 3 cm**短く**し，
ヨコを 5 cm**長く**した．
このとき，
面積は変わらなかった．
もとの正方形の一辺の長さを求めよ．

$$x^2=(x-3)(x+5)$$

$x^2=x^2+2x-15$

$2x=15$

$$x=\frac{15}{2}$$

差を 5 cmにしてみよう．

正方形の一辺の
タテを 3 cm**短く**し，
ヨコを 8 cm**長く**した．
このとき，
面積は変わらなかった．
もとの正方形の一辺の長さを求めよ．

$$x^2=(x-3)(x+8)$$

$x^2=x^2+5x-24$

$5x=24$

$$x=\frac{24}{5}$$

また何か見えてきそうだが
これはこのくらいにしておこう．

少し意味が有りそうな問題を考えてみよう．

10 cmの線分を
1 cm単位で **2 つに分け**
それぞれを１辺とする正方形をつくると
その面積の和は52 cm²
となった，短い方の長さを求めよ．

$1^2+9^2=$

$2^2+8^2=$

$3^2+7^2=$

$4^2+6^2=$

$5^2+5^2=$

52 cm²になるのは

$\boxed{4}$ cmと $\boxed{6}$ cmの時である．

短い方は $\boxed{4}$ cm.

しかし，この方法では

30 cmの線分を
1 cm単位で２つに分け
それぞれを１辺とする正方形をつくると
その面積の和は650 cm²
となった，短い方の長さを求めよ．

上の方法ではいささか面倒そうである．
方程式を使って解いてみよう．

短い方の長さをｘcmとすると，

$$x^2+(30-x)^2=650$$

$x^2+x^2-60x+900=650$

$2x^2-60x+250=0$

$x^2-30x+125=0$

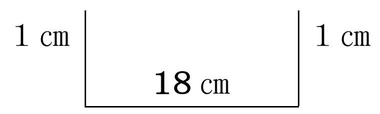
$$(x-5)(x-25)=0$$

短い方の長

方程式の便利なところである．

この問題はあまり意味がなさそうだが．

幅 20 cmのトタン板を折り曲げて
水を流す水路をつくりたい．
できるだけたくさんの水を流すには
折り曲げる長さを何ｃｍにすればよいか．



折り曲げる長さを 1 cmにすると，
断面積は

$1\times(20-1\times2)=\boxed{\quad}$ (cm²)

以下同様に

$2\times(20-2\times2)=\boxed{\quad}$ (cm²)

$3\times(20-3\times2)=\boxed{\quad}$ (cm²)

$4\times(20-4\times2)=\boxed{\quad}$ (cm²)

$5\times(20-5\times2)=\boxed{\quad}$ (cm²)

$6\times(20-6\times2)=\boxed{\quad}$ (cm²)

減り始めた．

深さを $\boxed{\quad}$ にすると良さそうだ．

深さをｘcmとして考えてみよう．

$$x\times(20-x\times2)$$

$=20x-2x^2$

$=-2x^2+20x$

ｘの式だが
これは文字式であって
方程式ではないので，
２で割ったりしては
いけないことに注意．

$=-2(x^2-10x)$

$=-2\{(x-5)^2-25\}$

$$=-2(x-5)^2+50$$

ｘがどのような値であれ，

$-2(x-5)^2$ は $x=5$ **以外の時は**

負の数になるので，

5 cmのとき

最大値 50 cm² となる．

実は，
これは，**二次方程式**の問題ではないのだ．

幅 16 cmのトタン板を折り曲げて
水を流す水路をつくりたい．
できるだけたくさんの水を流すには
折り曲げる長さを何ｃｍにすればよいか．

$$x\times(16-x\times2)$$

$=16x-2x^2$

$=-2x^2+16x$

$=-2(x^2-8x)$

$=-2\{(x-4)^2-16\}$

$$=-2(x-4)^2+16$$

4 cmのとき最大値 16 cm²

幅 24 cmのトタン板を折り曲げて
水を流す水路をつくりたい．
できるだけたくさんの水を流すには
折り曲げる長さを何ｃｍにすればよいか．

$$x\times(24-x\times2)$$

$=24x-2x^2$

$=-2x^2+24x$

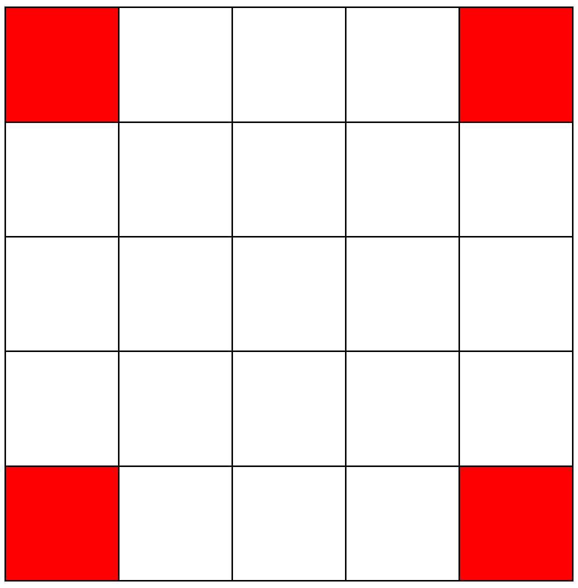
$=-2(x^2-12x)$

$=-2\{(x-6)^2-36\}$

$$=-2(x-6)^2+36$$

6 cmの

実は，
これも，二次方程式の問題ではないのだ．
どちらかと言えば，
二次関数のもんだいかな．
二次式の計算をしていると
二次方程式を解いているような
気がしてきますね．



タテが10 cm，ヨコが20 cmの

長方形の紙の隅から

１辺が x cmの

正方形を切り取って

直方体の容器を作ったときの

容積を求め，

どの時の容積が一番大きいか

調べなさい．

表を作って考えてみる．

底辺のタテ	底辺のヨコ	求める式	体積
10 −1×2	20 −1×2	8×18×1	144
10 −2×2	20 −2×2	6×16×2	192
10 −3×2	20 −3×2	4×14×3	168
10 −4×2	20 −4×2	2×12×4	96
10 −5×2	20 −5×2	0×10×5	0

１辺が２ cmの正方形

を切り取ったときが

いちばん大きそうである．

しかし、その時が一番大きいかどうかは

さだかではない。

x(10−2ｘ)(20−2ｘ2)

３次式なので中学の範囲を超えるので

やめておきましょう．

タテが20 cm，ヨコが30 cmの長方形の紙の隅から

１辺が x cmの正方形を切り取って

直方体の容器を作ったときの容積を求め，

どの時の容積が一番大きいか調べなさい．

表を作って考えてみる．

底辺のタテ	底辺のヨコ	求める式	体積
20−1×2	30−1×2	18×28×1	404
20−2×2	30−2×2	16×26×2	832
20−3×2	30−3×2	14×24×3	1108
20−4×2	30−4×2	12×22×4	1056
20−5×2	30−5×2	10×20×5	1000
20−6×2	30−6×2	8×18×6	824
20−7×2	30−7×2	6×16×7	672
20−8×2	30−8×2	4×14×8	448
20−9×2	30−9×2	2×12×9	216
20−10×2	30−10×2	0×10×10	0

辺が２ cmの正方形

と言えるかどうかはわからない。

高校への宿題です。