図形の証明システムを理解するには

先ず

$\boxed{1}$ 図形の形を知るとともに

定義	と	名称	と	性質	の
↓		↓		↓	
３つの辺が等しい三角形	を	正三角形	と呼ぶ。	正三角形の３つの角は等しい。	

例

の約束を知らねばなりません。

次に

$\boxed{2}$ **証明**は**順**に**進む**ので

その順を知らねばなりません。※

ステップ**1**　[対頂角は等しい]
[平行線ならば 同位角は等しいなど]

ステップ**2**　[三角形の合同条件]

ステップ**3の1**　[２辺が等しい三角形は２角が等しい]
[直角三角形の合同条件]

ステップ**3の2**　[平行四辺形の性質]
[平行四辺形になる条件]

※また、前のステップは、一々証明せずに
使ってよいことも確認しましょう。

さらに

③ **証明**は、学習者が自力だけで発見すべきもの
ではありません。

歴史を重ねる中で約束された部分が多いので
良い証明を読み、真似ることから始めるのが
良い学習方法です。

さいごに

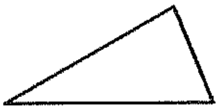
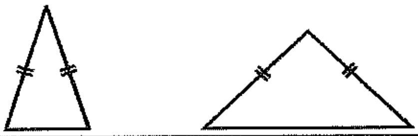
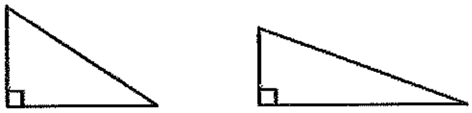
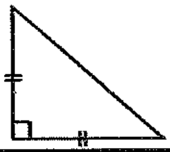
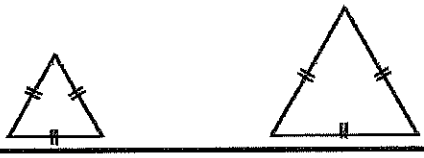
証明は
文や**式**で表されるので、目は
文や式にとらわれがちですが
文や式は
図形を模したものですから
学習者が見るべきは図形そのものです。
そして
図形で納得したことを**文字**や**式**に**表す。**

くりかえします。

図形で表現したことを **文字**や**式**に**表しなおす**

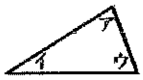
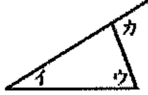
これが[証明せよ]の[こたえ]の部分です。
文字や式は
図形の影です。
図形の本体そのものを
しっかりと確認しましょう。
図形の本体そのものでの証明ができたら
文字や式の表し方での約束はわずかですから
証明表現力はすぐにできます。

三角形の名称・定義・性質

一般的名称	定義
三角形 	３つの辺で囲まれた図形 を三角形と言う。
二等辺三角形 	２つの辺が等しい三角形 を二等辺三角形と言う。
直角三角形 	直角のある三角形 を直角三角形と言う。
直角二等辺三角形 	直角があり ２つの辺が等しい三角形 を直角二等辺三角形と言う。
正三角形 	３つの辺が等しい三角形 を正三角形と言う。

三角形の一般名称は
かなり定義を示している。

三角形の名称・定義・性質

定義的名称	性質
三辺形	 内角の和＝ア＋イ＋ウ＝１８０°  外角＝イ＋ウ（内対角の和）
通称に同じ (二等辺三角形)	両底角は 等しい
通称に同じ (直角三角形)	直角以外の角の和は９０° ａ＋ｂ＝９０° ａ＝９０°－ｂ
通称に同じ (直角に等辺三角形)	９０° ４５° ４５° ４５° ４５°
三(さん)等辺三角形	３つの角が等しい

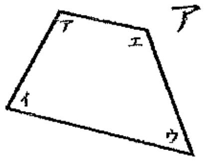
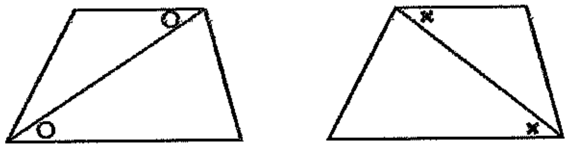
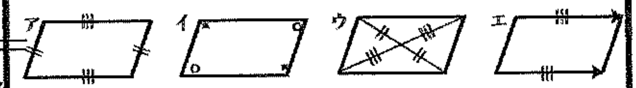
四角形の名称・定義・性質

一般的名称	定義
四角形	４つの辺で囲まれた図形 を四角形と言う。
台形	１組の対辺が平行な ひとくみ 四角形 を台形と言う。
平行四辺形	２組の対辺が平行な ふたくみ 四角形 を平行四辺形と言う。
長方形	４つの角が全て等しい 四角形 を長方形と言う。
ひし形	４つの辺が全て等しい 四角形 をひし形と言う。
正方形	４つの角が全て等しく ４つの辺が全て等しい 四角形 を正方形と言う。

四角形の名称は
三角形ほどは定義を示していない。
それゆえ
一般的名称をくり返し唱えても
問題解決には進みにくい。

※定義にもどるか定義的名称に進んで
考えること！が大切！

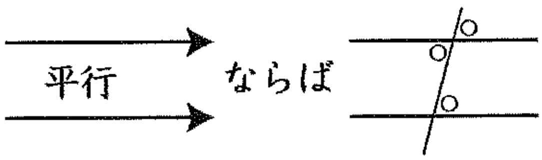
四角形の名称・定義・性質

定義的名称	性質		
四辺形	 ア＋イ＋ウ＋エ＝３６０° （４つの内角の和は３６０°）		
ひと組対辺平行四辺形			
ふた組対辺平行四辺形	ならば ⇒  ⇐ ならば 		
４等角四辺形	対角線は 等しい。	対辺は等しい 対角は等しい 対角線は 中点で交わる	平行四辺形で言えたことは ここでも言える。
４等辺四辺形	対角線は 垂直に交わる。	対辺は等しい 対角は等しい 対角線は 中点で交わる	
４等角 ４等辺 四辺形	対角線は 等しく 垂直に交わる。	対辺は等しい 対角は等しい 対角線は 中点で交わる	
	長方形、ひし形、正方形は 平行四辺形のグループに属するので 平行四辺形の性質は すべて持っている。		

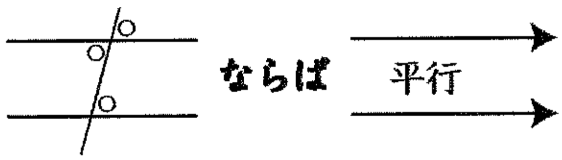
証明の基本定理を図示すると

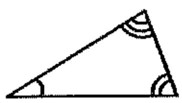
証明ステップ 1

対頂角は等しい

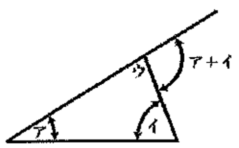


同位角、錯角が等しい





三角形の内角の和は180°



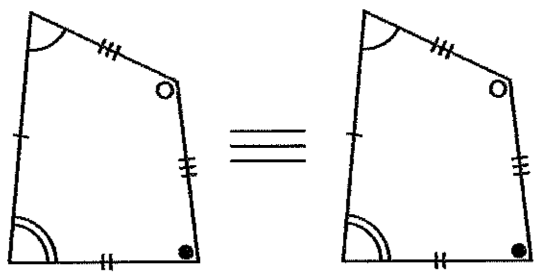
三角形の外角は内対角の和

多角形の内角の和
＝180° ×（n－2）

外角の和は常に360°

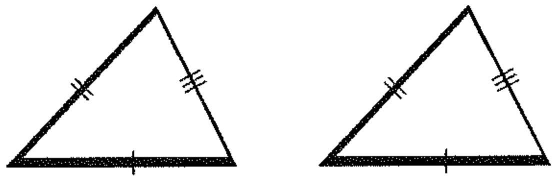
証明ステップ 2

合同な図形では
対応する辺も
対応する角も等しい

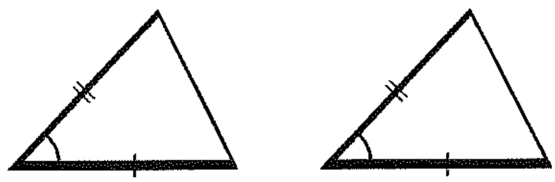


三角形の合同条件

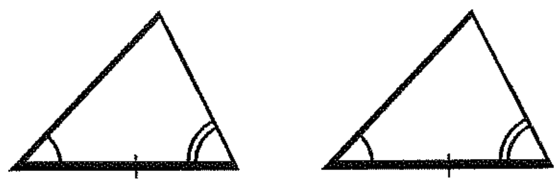
ア **3辺**が相等しいとき



イ **2辺と間の角**が相等しいとき



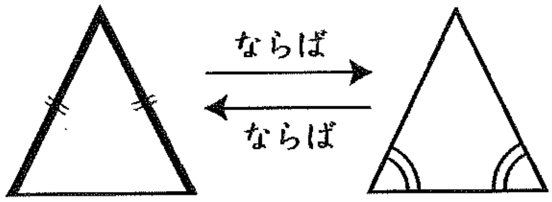
ウ **1辺と両端の角**が相等しいとき



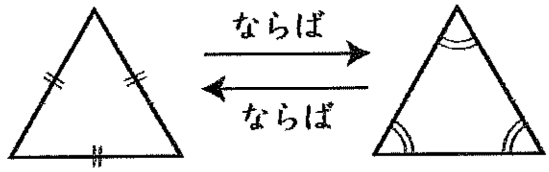
全体像

証明ステップ 3の1

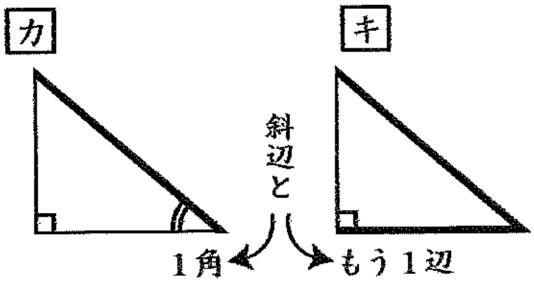
二等辺三角形



正三角形

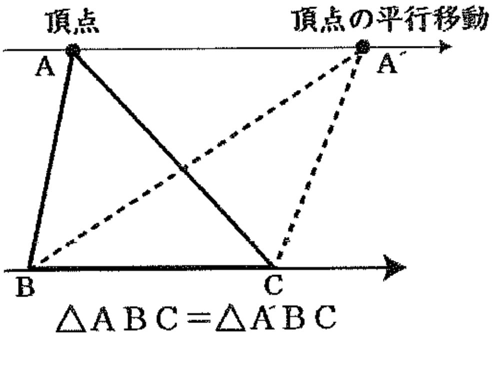


直角三角形の合同条件



これは
ステップ2でも可能

平行線と面積

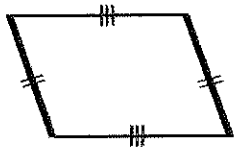


△ABC＝△A´BC

証明ステップ 3の2

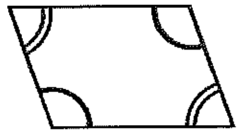
A 平行四辺形の性質

サ



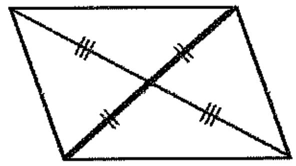
対辺は等しい

シ



対角は等しい

ス



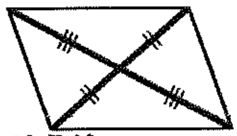
互いに
対角線は2等分

B 平行四辺形になる条件

タ

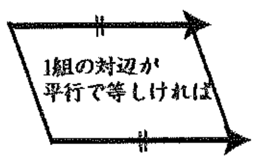
チ

ツ



対角線が2等分されれば

テ



→ **2組の対辺が平行になる。**

平行四辺形になる。

ト　**定義**

証明に使われる 基本定理を文で示すと

ステップ 1	ステップ 2

ステップ 1

対頂角は等しい

$\boxed{\text{平行線}} \Rightarrow / \Leftarrow \boxed{\text{同位角 錯角は 等しい}}$

三角形

内角の和＝１８０°

外角＝内対角の和

多角形

内角の和

＝１８０°×(n－2)

外角の和＝３６０°

ステップ 2

合同と言われた図形では

対応する線分
対応する角 は**等しい**

三角形の合同条件

①　３辺

②　２辺と
間の角

③　１辺と
両端の角

がそれぞれ等しい。

基本定理

次のステップに進んだとき
前のステップは証明済みとして
使ってよい約束です。

ステップ 3の1

２つの辺が等しい三角形

⇕

２つの角が等しい三角形

３つの辺が等しい三角形

⇕

３つの角が等しい三角形

直角三角形の合同条件

① 斜辺と1角

② 斜辺と他の1辺

がそれぞれ等しい。

平行線と面積

三角形の頂点を
底辺と平行に
移動してできた三角形は
元の三角形と同面積。

ステップ 3の2

A

平行四辺形の性質

① **対辺**が等しい

② **対角**が等しい

③ 対角線は
中点で交わる

B

平行四辺形になる条件

① **対辺**が２組とも等しい

② **対角**が２組とも等しい

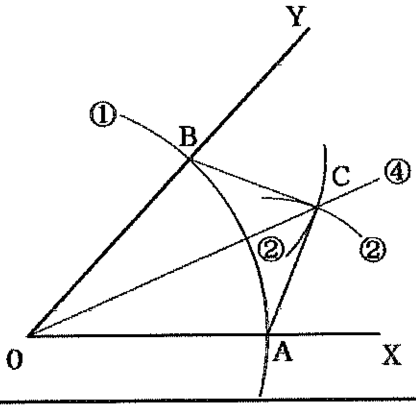
③ 対角線が**中心**で交わる
(以上性質に同じ)

④ **1組の対辺が平行で等しい**

⑤ 定義

ステップ2を使う証明

下図は∠XOYを
2等分する図です。
作図の順をよく見て写しなさい。

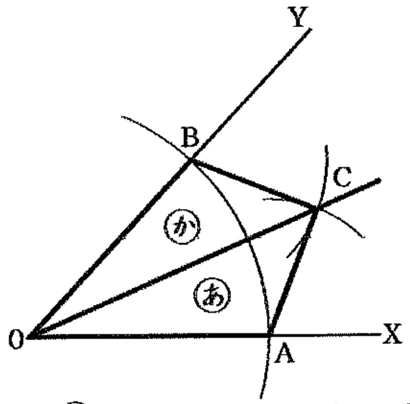


① 点Oから
OAを半径とする弧をかく。

② 点A、点Bから
等しい半径の弧を書く。
交点Cをとる。

③ OCをむすぶ。

三角形㋐と㋕をくらべて
合同になる理由を示しなさい。



三角形 ㋐ の → A　0　C
に対応するのは
三角形 ㋕ の → $\boxed{B}$ $\boxed{0}$ $\boxed{C}$
である。

㋐　㋕

OA＝OB

AC＝BC

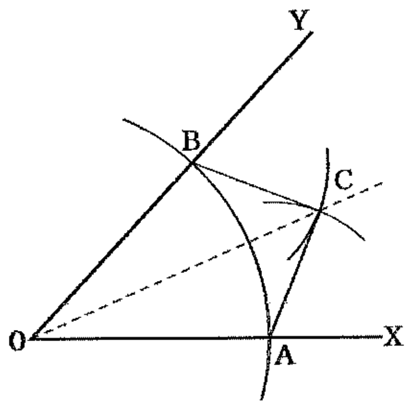
OCは共通

3辺がそれぞれ等しいので

△AOC≡△BOC

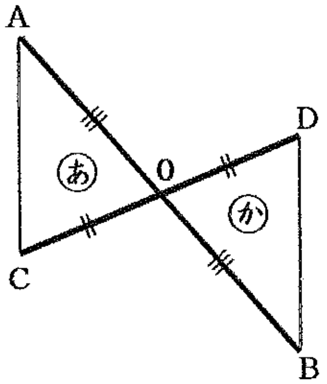
合同な図形では
対応する角は等しいから

∠AOC＝∠BOC である。



ステップ２を使う証明

線分ＡＢと線分ＣＤが点Ｏで交わり



ＡＯ＝ＢＯ………………… ①

ＣＯ＝ＤＯ………………… ②

である。

このとき

三角形あとかにおいて

対頂角は等しいので

∠ＡＯＣ＝∠ＢＯＤ…… ③

①②③により

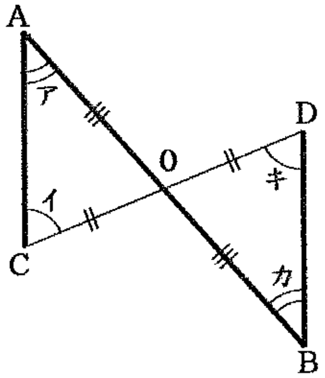
三角形あとかは

２辺とその間の角が等しいので

合同である。

△ＡＯＣ≡△$\boxed{B}\boxed{O}\boxed{D}$

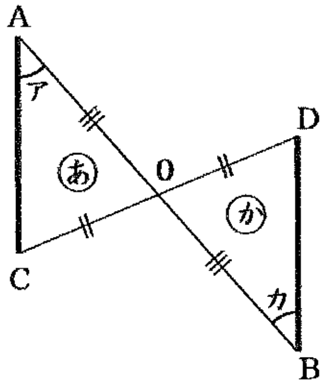
合同であれば対応する角は等しいから



角ア＝角カ

角イ＝角キ

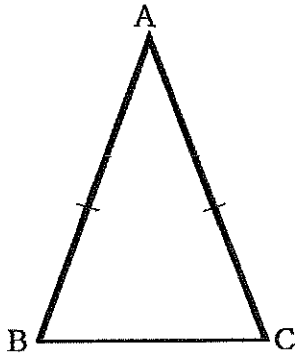
[角ア]と[角カ]が等しいということは**[錯角]**が等しいことなので



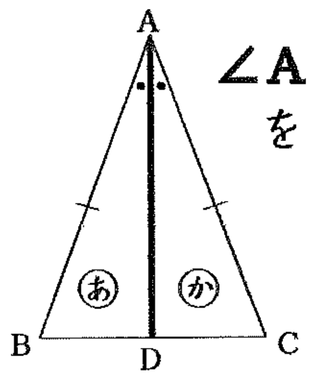
ＡＣ//$\boxed{DB}$

ステップ２を使う証明

AB＝AC



AB＝AC
である
三角形の



∠Aの２等分線
を引いてできる

２つの
三角形

あ と か をくらべる

（初めに決めたのだから）
①AB＝AC

（角Aの二等分線をひいたのだから）
②∠BAD＝∠CAD

（見たとおり）
③ADは共通

よって
あ と か は合同

あ≡か

△ABD≡△$\boxed{A}\boxed{C}\boxed{D}$

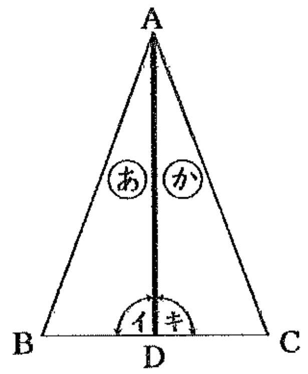
だから

∠B＝∠$\boxed{C}$

上記以外にも

等しい辺や等しい角

がある。



① **BD＝$\boxed{CD}$**

② **∠イ＝∠$\boxed{キ}$** で

∠イ＋∠$\boxed{キ}$＝１８０°
だから

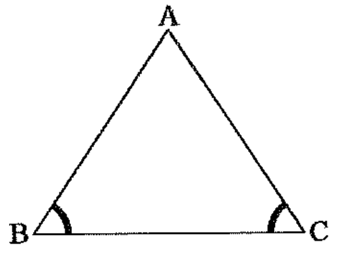
∠イ＝∠$\boxed{キ}$＝９０°

よって

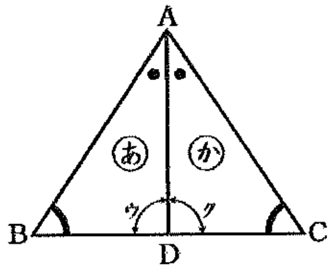
二等辺三角形の
頂角の**二等分線**は
底辺を
垂直に**二等分**する。

と言える。

ステップ２を使ってステップ３－１を証明

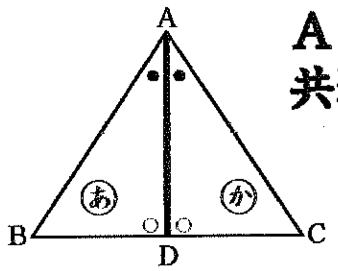


∠B＝∠C
のとき
∠Aの二等分線
を引くと



三角形ⓐとⓚができる。

２つの角が等しいので
残りの角ウとクも
等しくなる。



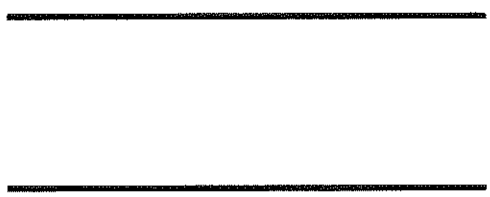
ADは
共通だから

1辺(AD)と
両はしの角が等しいので
合同！

△ABD
≡△ACD ゆえに
AB＝AC

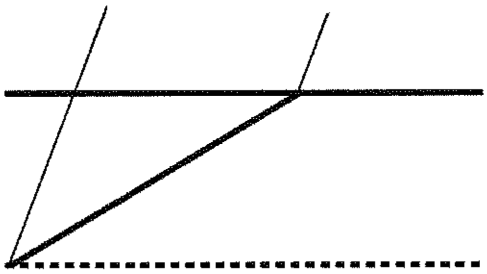
ステップ3－1を使う証明

テープがあります。

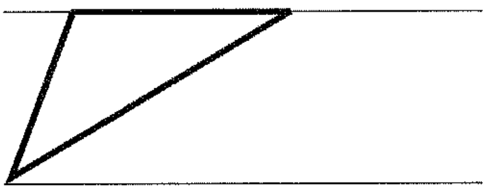


これを下図のように

折り返します。



できた三角形が



二等辺三角形であることを

次のように考えて証明します。

折り返しする問題を

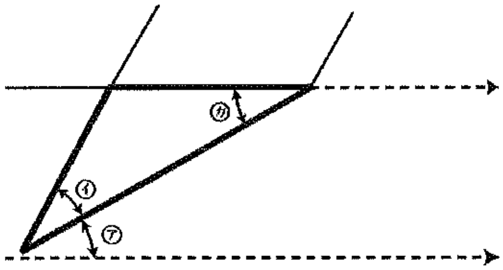
解くコツの1つは

折り返す前と後は同じ

ということです。

(折り返したのだから)

∠㋐＝∠㋑ --------①



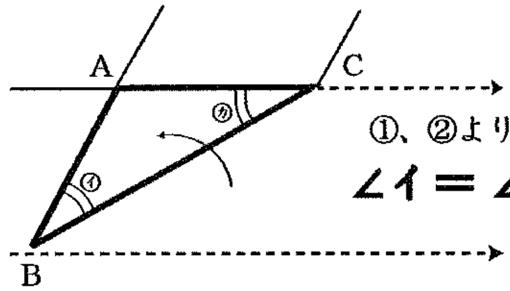
上の図において

紙テープの両端の線は

平行だから錯角は等しい

ので

∠㋐＝∠㋕ --------②



①、②より

∠イ＝∠カ

△ABCの

∠イ＝∠カ

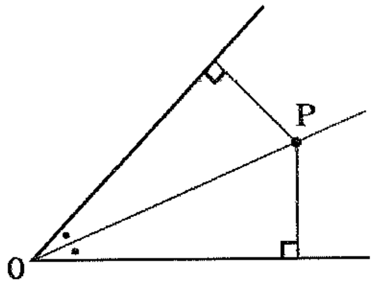
だから

△ABCは

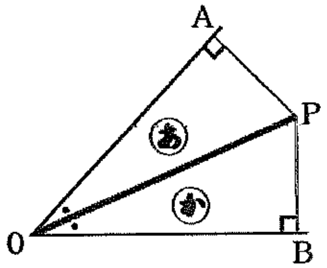
［二等辺三角形］

ステップ２を使ってステップ３－１を証明

角Ｏの２等分線上の**点Ｐ**から
角の２辺に**垂線**を引くと



２つの**直角三角形**
あ と か ができる。



斜辺ＯＰが**共通**で
∠ＡＯＰ
＝∠ $\boxed{B}\boxed{O}\boxed{P}$ だから

直角三角形の合同条件

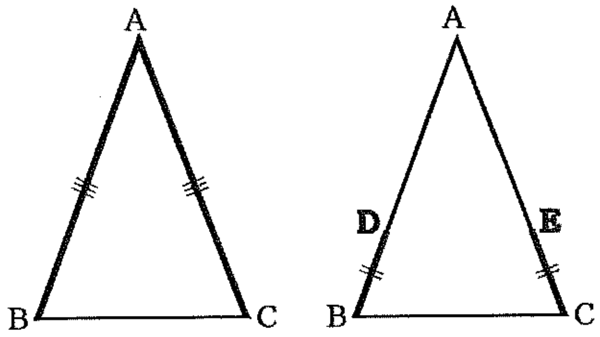
斜辺と他の１角が等しいとき 直角三角形である。

により

△ＡＯＰ
≡△ $\boxed{B}\boxed{O}\boxed{P}$

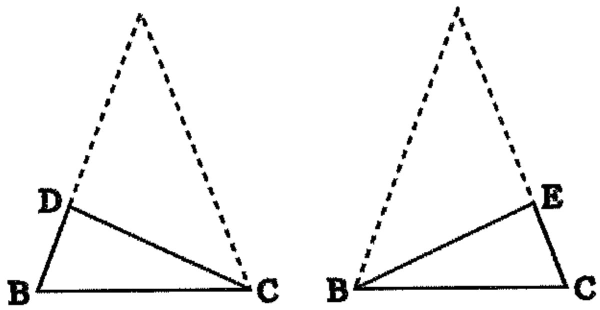
よって

ＡＰ＝ $\boxed{BP}$
ＯＡ＝ $\boxed{OB}$



AB＝AC

BD＝CE のとき



△BCDと△CBEにおいて

㋐ BCは共通

AB＝ACだから

㋑ ∠B＝∠C

㋒ DB＝EC

三角形の合同条件

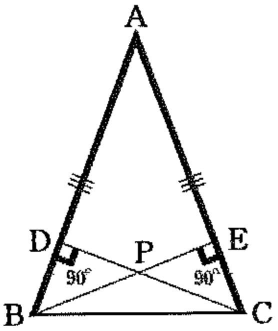
2辺とその間の角が等しい時 2つの三角形は合同。

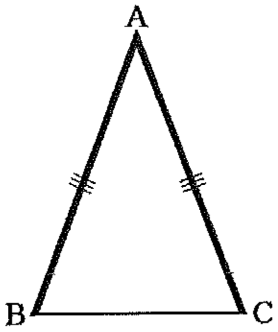
により

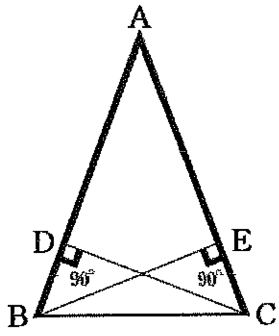
△DBC

≡△$\boxed{E}\boxed{C}\boxed{B}$

ステップ２を使ってステップ３－１を証明

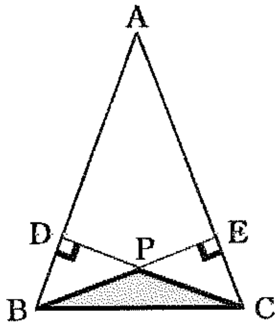






ＡＢ＝ＡＣ　　**∠BDC=∠CEB=90°**

ならば

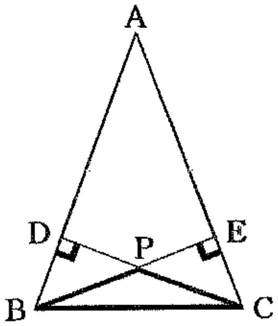


ＰＢ＝ＰＣ

右の

△ＰＢＣ

について考える。

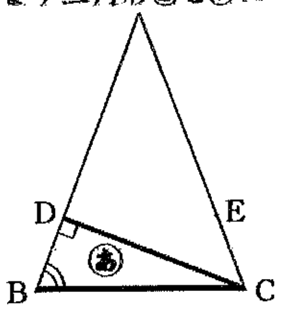


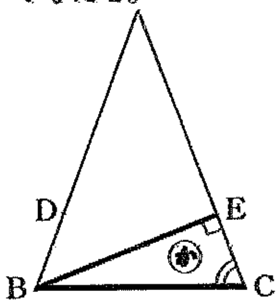
見るところ

二等辺三角形

だろうと思われる。

まず三角形あとかについて考える。





斜辺は共通

共通だから	**ＢＣ＝ＣＢ**	①
二等辺三角形の両底角は等しい	**∠Ｂ＝∠ $\boxed{\text{C}}$**	②
	直角が両方にある	③

よって

直角三角形の合同条件

> 斜辺と他の１角が等しい
> 直角三角形は合同。

により

対応する角∠ＢＣＤ＝∠ＣＢＥ

２つの角の等しい三角形は

二等辺三角形

ステップ２を使って
平行四辺形の性質 ㋐ ㋑を証明
（ステップ３－２Ａ）

㋐　対辺は等しい

㋑　対角は等しい

を証明する。

そのあと

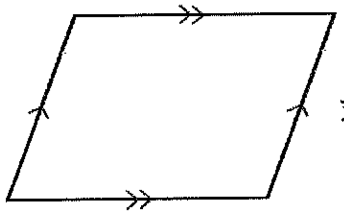
ステップ３－２Ａの
平行四辺形の性質も使って

ステップ３－２Ａ
平行四辺形の性質㋒

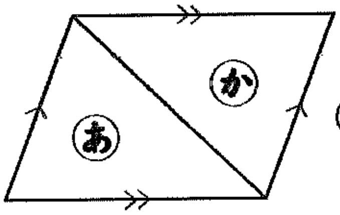
㋒　対角線は中点で交わる

を証明する。

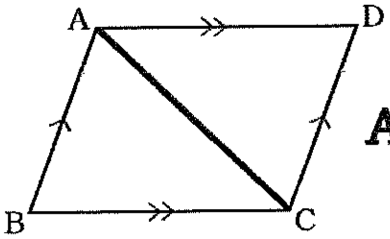
２組の対辺が平行な四角形に



対角線を引く

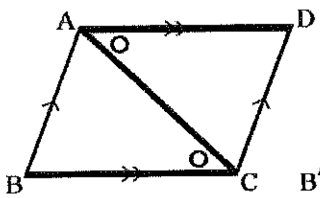


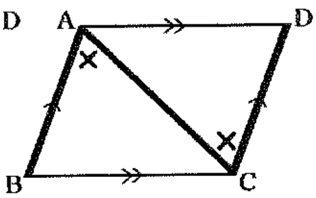
三角形
あとか
が出来る。

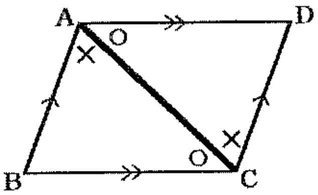


ＡＣ共通

平行線の錯角は等しいから







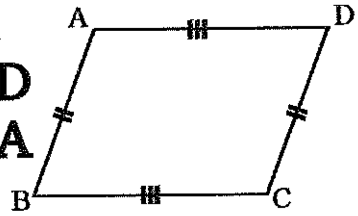
１辺ＡＣ(＝ＣＡ)と
両端の角が
それぞれ等しいので

$$\triangle \overset{\times}{A} B \overset{\circ}{C} \equiv \triangle \underset{\times}{\boxed{C}}\boxed{D}\underset{\circ}{\boxed{A}}$$

よって

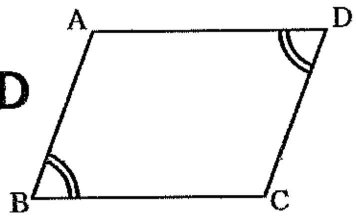
対応する辺

$AB = CD$
$BC = DA$



対応する角

$\angle B = \angle D$

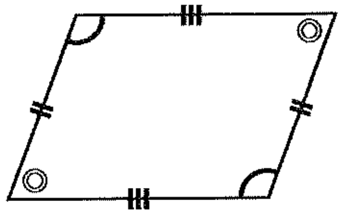


また

$$\begin{array}{l} \angle A = \angle BAC + \angle CAD \\ \qquad\quad\;\; \shortparallel \qquad\qquad\; \shortparallel \\ \angle C = \angle DCA + \angle BCA \end{array}$$

$$\angle A = \angle C$$

今　**平行四辺形ならば**



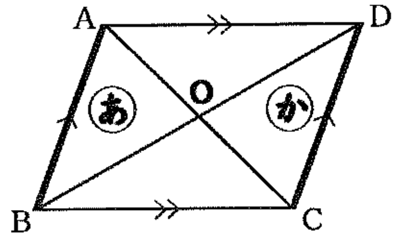
対辺は等しい
対角は等しい
と証明されたので、
以後

平行四辺形の対辺は等しい 平行四辺形の対角は等しい

ことを、証明しないで使う。

ステップ２、３の２Ａを使って
ステップ３の２Ａを証明

平行四辺形に２本の対角線を引く

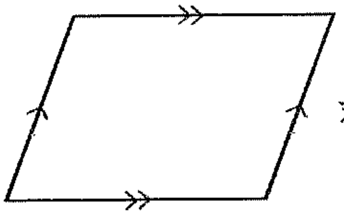


三角形 あ と か において
すでに証明済みの[対辺は等しい]
を使って

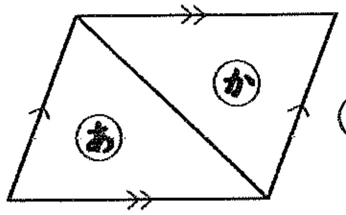
AB＝ $\boxed{\text{CD}}$

ステップ２を使って
　　　ステップ３－２Ｂを証明する。

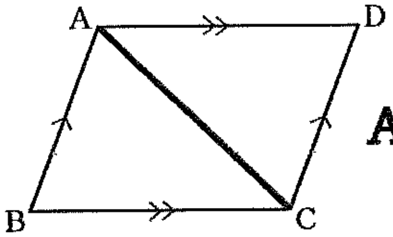
２組の対辺が平行な四角形に



対角線を引く

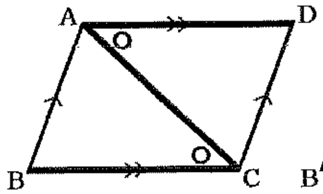


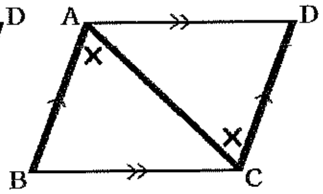
三角形
あとか
が出来る。

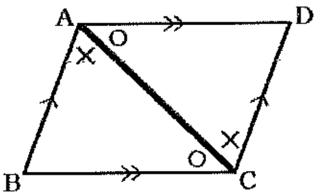


ＡＣ共通

平行線の錯角は等しいから



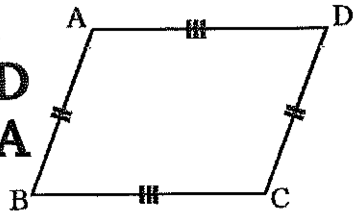




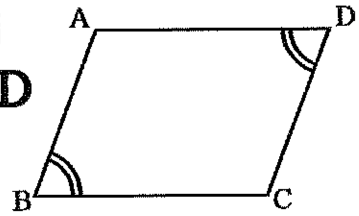
１辺ＡＣ(＝ＣＡ)と
両端の角が
それぞれ等しいので

$$\triangle \overset{\times}{A} B \overset{\circ}{C}$$
$$\equiv \triangle \underset{\times}{\boxed{C}} \boxed{D} \underset{\circ}{\boxed{A}}$$

対応する辺
ＡＢ＝ＣＤ
ＢＣ＝ＤＡ



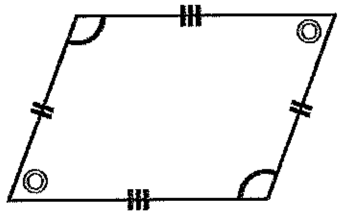
対応する角
∠Ｂ＝∠Ｄ



また
∠Ａ＝∠ＢＡＣ＋∠ＣＡＤ
‖　　　　‖
∠Ｃ＝∠ＤＣＡ＋∠ＢＣＡ

∠Ａ＝∠Ｃ

今　**平行四辺形ならば**



対辺は等しい
対角は等しい
と証明されたので、
以後

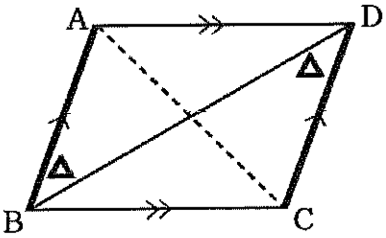
平行四辺形の対辺は等しい 平行四辺形の対角は等しい

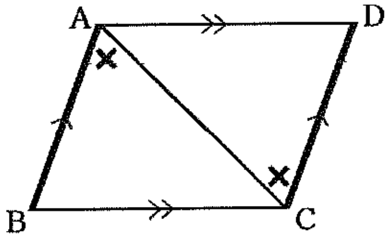
ことを、証明しないで使う。

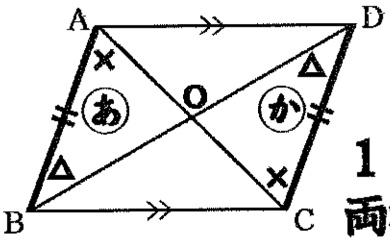
あとは

平行線の錯角は等しい

を使って







1辺と
両端の角が
等しいので

$\triangle$ABO
$\equiv\triangle\boxed{C}\boxed{D}\boxed{O}$

↑
対応関係に気をつけて！

よって

AO＝CO
BO＝DO

このことを

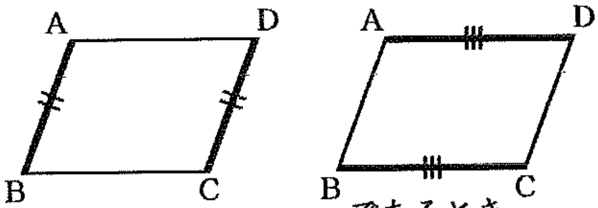
平行四辺形の対角線は中点で交わる
または
互いに他を２等分する

と言う。

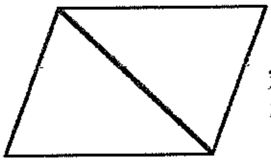
ステップ２を使ってステップ３の２Ｂを証明

平行四辺形になるための条件の証明

1

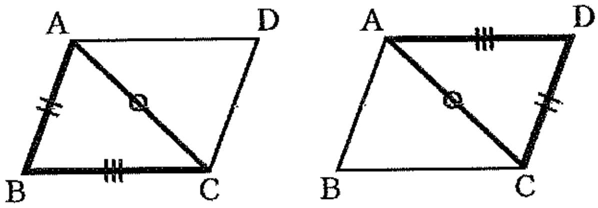


であるとき



対角線を
引くと

２つの三角形ができる



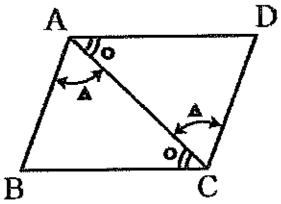
ＡＢ＝ＣＤ

ＢＣ＝ＤＡ

ＡＣ＝ＣＡ

それぞれ等しいので

△ＡＢＣ≡△ＣＤＡ

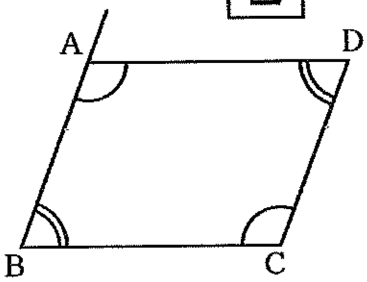


錯角△によって　**ＡＢ//ＣＤ**

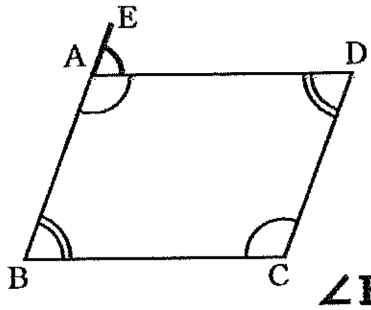
錯角○により　**ＢＣ//ＤＡ**

よって　平行四辺形

2



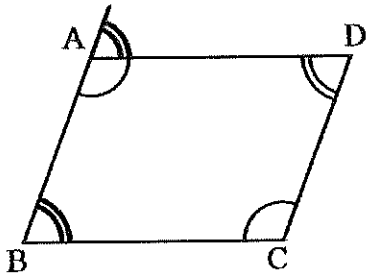
∠Ａ＋∠Ｂ＝１８０°



∠Ａ＋∠ＥＡＤ＝１８０°

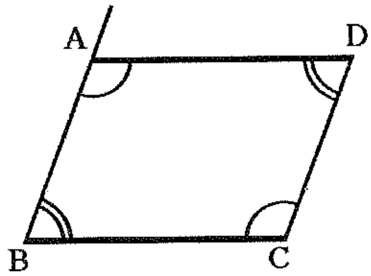
よって

∠Ｂ＝∠ＥＡＤ



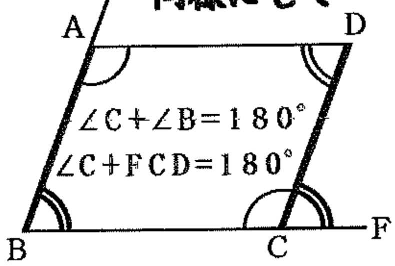
同位角が等しい。

よって



ＡＤ//ＢＣ

同様にして



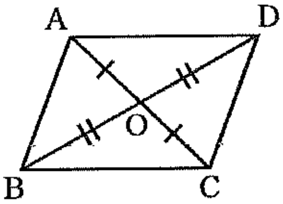
ゆえに∠Ｂ＝∠ＦＣＤ

同位角が等しいので

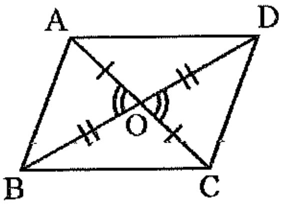
$\boxed{\textbf{AB//DC}}$

これはステップ１を使っての証明

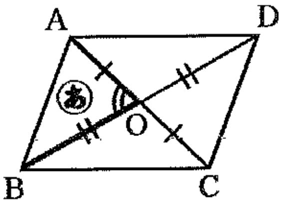
3

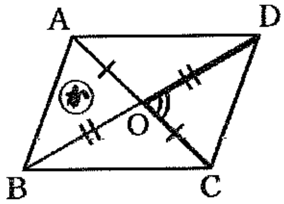


AO＝CO
BO＝DO
であると約束する。



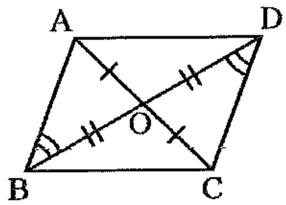
対頂角は等しい。





△AOBと△CODにおいて
約束により
AO＝CO
BO＝DO
対頂角
∠AOB≡∠COD
２辺とその間の角が等しいので
△AOB≡△COD

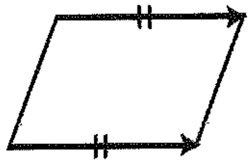
よって
対応する角が
等しいので



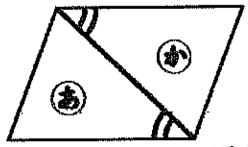
∠ABO＝∠CDO
錯角が等しいので
AB//DC

同様にして・・中略・・AD//BC

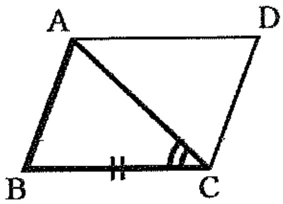
4

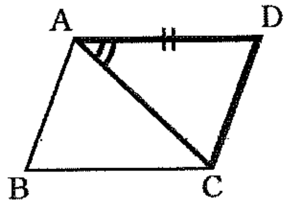


１組の対辺が
平行で等しい時



三角形
あとかは合同
なぜなら
平行だから錯角は等しい。





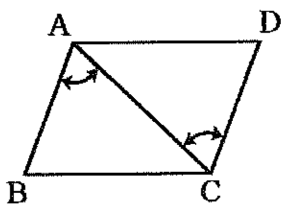
約束により
BC＝DA
ACは共通

三角形の合同条件

２辺とその間の角が等しいとき 三角形は合同である。

により
対応する角

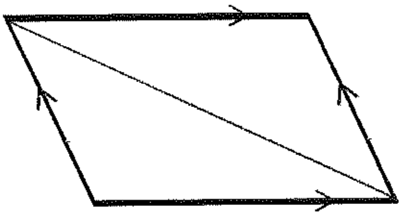
△ABC
≡△CDA ⇒ **∠BAC**
＝∠DCA



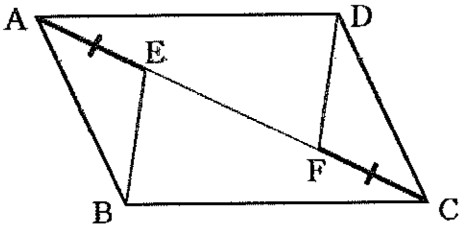
錯角が等しいので
AB//DC
２組の対辺が
平行となる。

ステップ3の２Ｂを使う証明

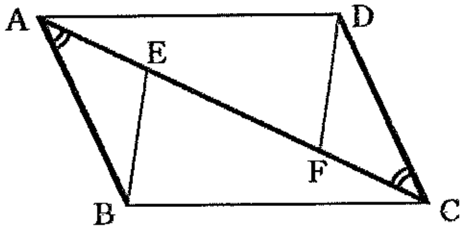
平行四辺形がある



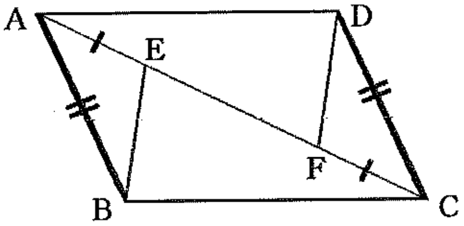
ＡＥ＝ＣＦとする。



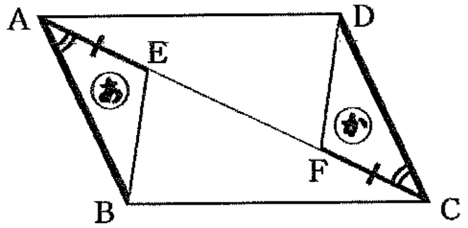
平行線の錯角は等しいから



平行線の対辺は等しいから



あ ≡ か

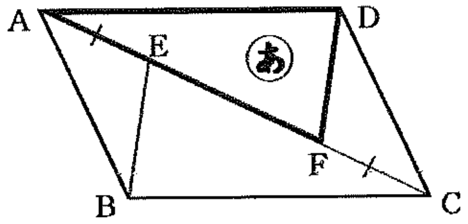


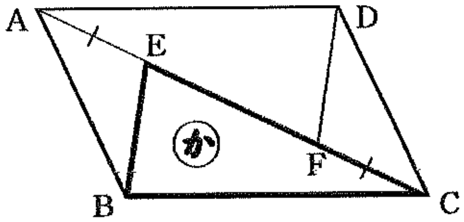
何故なら２辺とその間の角が
それぞれ等しいので。

よって**ＥＢ＝ＦＢ**

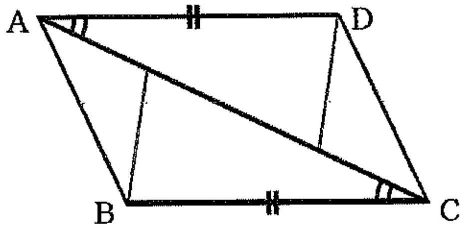
平行四辺形がある

ＡＥ＝ＣＦとする。

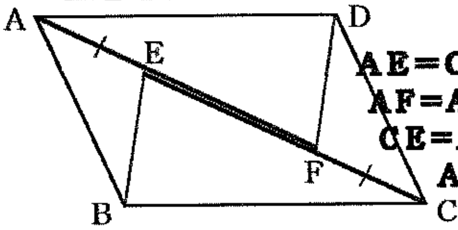




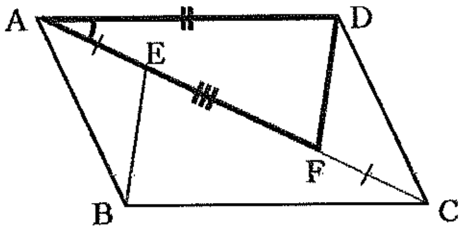
平行四辺形だから

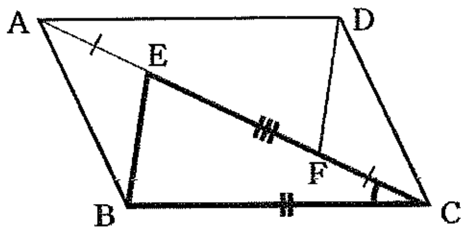


ＡＤ＝ＢＣ
∠ＤＡＣ＝∠ＢＣＡ



AE=CF だから
AF=AC−CF
CE=AC−AE
AF=CE

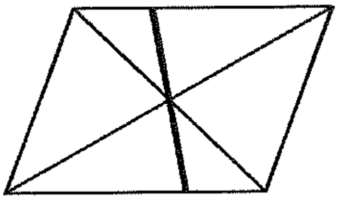


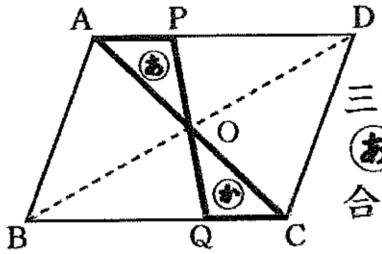


△ＡＤＦ≡△ＣＢＥ

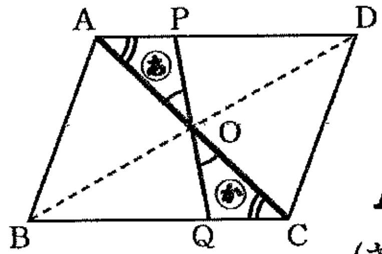
平行四辺形の

対角線の
交点を通る
直線を考える。





三角形
あ と か は
合同ではないか。



三角形
あ と か
において

AO＝CO

（対角線は
中点で交わる）

∠PAO＝∠QCO

（平行線の錯角は等しい）

∠POA＝∠QOC

（対頂角は等しい）

三角形の合同条件

1辺と両端の角が それぞれ等しいとき 三角形は合同

により

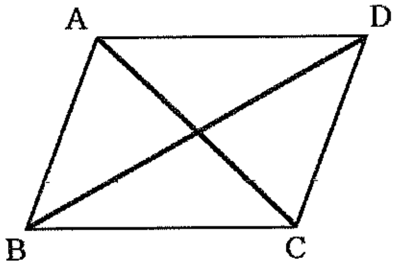
△POA≡△QOC

よって対応する辺

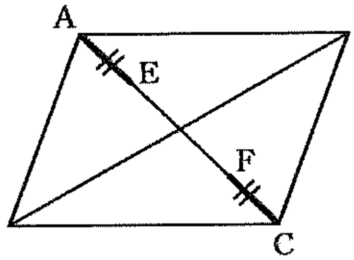
PO＝QO

ステップ３の１を使って証明する。

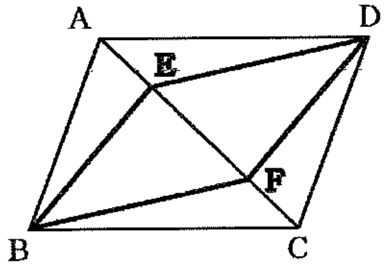
平行四辺形の対角線上に



ＡＥ＝ＣＦとなるような
点Ｅ、Ｆをとるとき

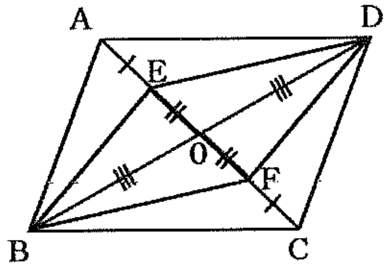


四角形**Ｅ**Ｂ**Ｆ**Ｄは
平行四辺形である。



平行四辺形になるための
条件は
５つあった。
そのどれがつかえるのか
考えよう。

証明　その１



ＢＯ＝ＤＯ
と言える。

平行四辺形の
対角線は中点で交わるので。

あと
ＥＯ＝ＦＯ
と言えれば。

四角形**Ｅ**ＢＦ**Ｄ**は
平行四辺形と言える。

これもまた、
元の平行四辺形から

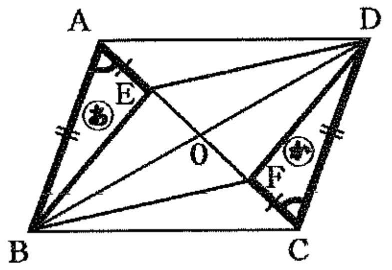
ＡＯ＝ＣＯ　である
－)　ＡＥ＝ＣＦ（と決めたゆえ）

差を
とれば　**ＥＯ＝ＦＯ**

対角線が中点で交わるから
平行四辺形と言える。

証明　その2

三角形㋐と㋕をくらべる



AB＝CD　　　(平行四辺形だから対辺は等しい)

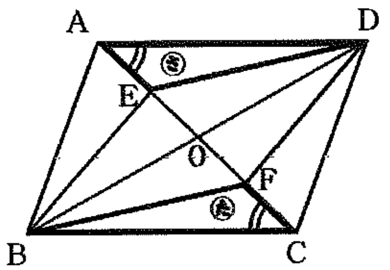
AE＝CF　　　(等しくとった)

∠BAE＝∠DCF(AB//DCだから錯角は等しい)

上記3つにより

△ABE≡△DCF

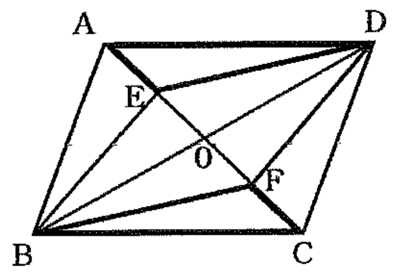
それゆえ **BE＝DF**・・・①



同様にして

△ADE≡△BCF

それゆえ **DE＝BF**・・・②

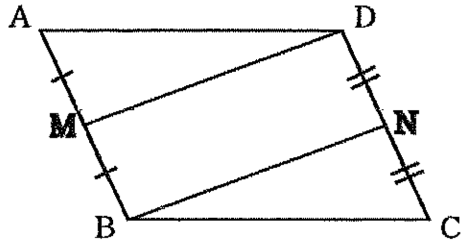


①、②より

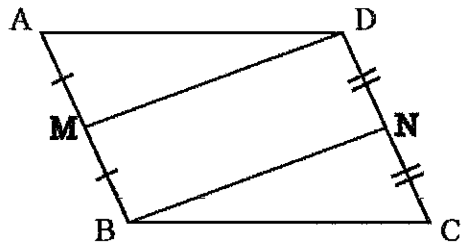
2組の対辺が等しいので

四角形EBFDは平行四辺形

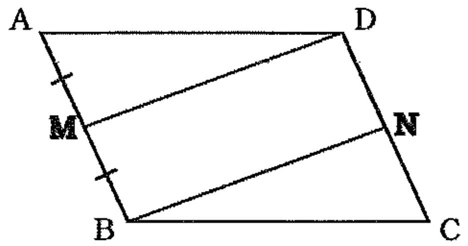
▱ABCDの向かいあう辺
AB、BCの中点をそれぞれ
M, Nとするとき



四角形**MBND**は
平行四辺形であることを
証明せよ。

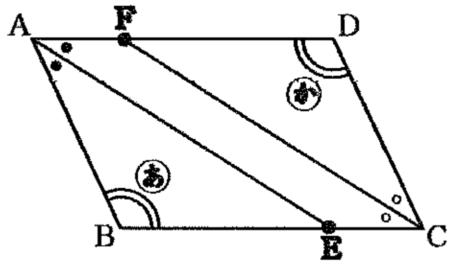


平行四辺形だから
AB=CD
それぞれ2分の1である
MBとNDも等しい。
平行四辺形だから
AB//DC
それゆえ
MB//ND

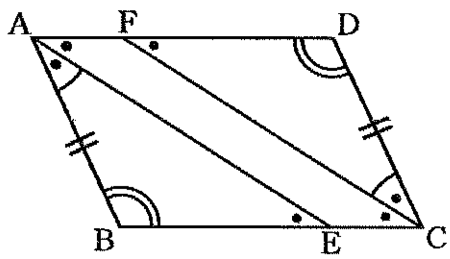


対辺**MB**と**ND**が
平行で等しいから
▱**MBND**は平行四辺形である。

▱**ABCD**で
∠A、∠Cの二等分線と
BC、ADとの交点をそれぞれ
E, Fとすると
AE=CFであると言える。

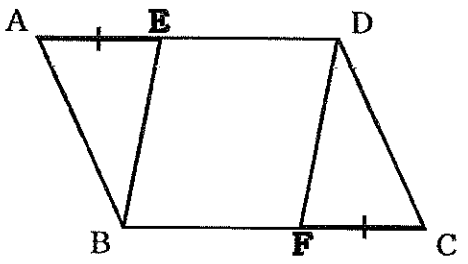


なぜなら
三角形㋐と㋕をくらべると
平行四辺形だから
AB=CD
∠B=∠D
∠A=∠C
だからその半分も等しい。
∠BAE=∠DCF

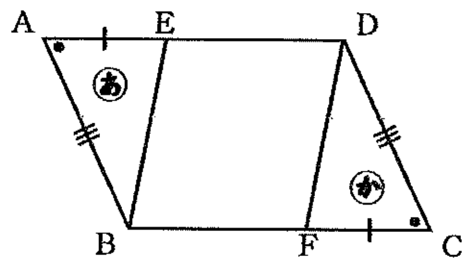


1辺と両端の角がそれぞれ等しいので
△ABE≡△CDF
それゆえ
AE≡CF

▱ABCDの辺AD、BC上に
AE＝CFとなるように
点**E**、**F**をとるとき

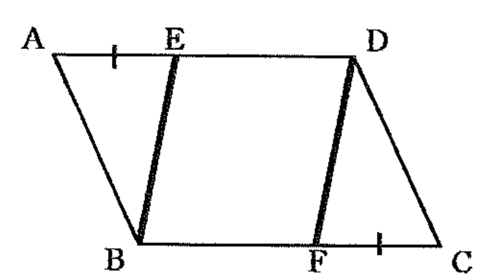


BE＝DFである。



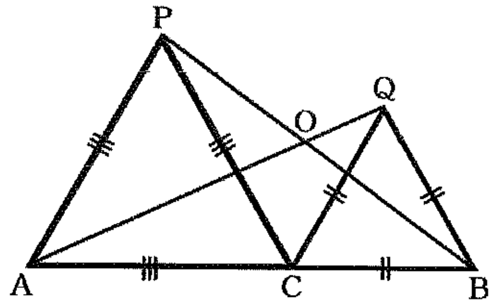
なぜなら
三角形あとかをくらべると
平行四辺形だから**AB＝CD**
平行四辺形だから**∠A＝∠C**
決めたのだから　**AE＝CF**

２辺とその間の角が
それぞれ等しいので
三角形あとかは合同

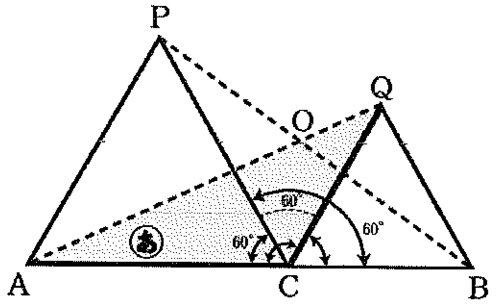


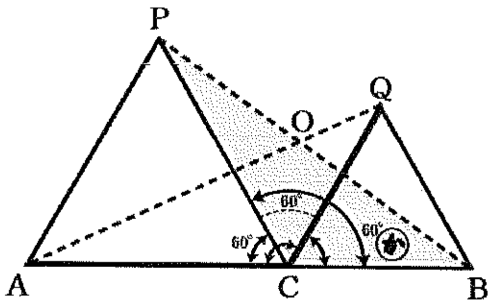
対応する**BF＝DF**

線分AB上に点Cをとり
AC、BCを1辺とする
正三角形を書くと
AQ＝BPである



三角形あとかをくらべると　※





※　**AC＝PC**
CQ＝CB
∠ACQ＝∠BCP
（それぞれ６０° に同じく
∠PCQを加えた角だから）
２辺とその間の角が
それぞれ等しいので
あ≡か
それゆえ
AQ＝BP