D−$\boxed{\text{か}}$　数直線の発明から生まれる数

$\boxed{1}$ 位置としての数の発見や順序

$\boxed{2}$ ０の発見

$\boxed{3}$ 大きさとしての数

$\boxed{4}$ 右向き・左向きの線分（カキ参照）

$\boxed{5}$ 概数

$\boxed{\text{カ}}$　足し算

$\boxed{\text{キ}}$　引き算

$\boxed{\text{ク}}$　加減混合　A +5 −2

$\boxed{\text{ケ}}$　加減複合　A −（10 −1）

$\boxed{\text{コ}}$　加減複合の表記法の色々

数直線の発明は、

数学の発展の大きな基です。

実に偉大な発明です。

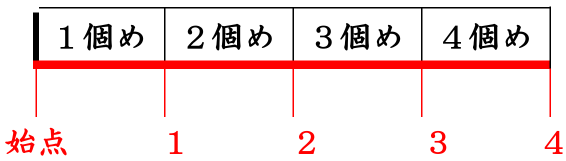
1
古エジプトやメソポタミアは
レンガを焼きました。

レンガ状のものを

１個	２個	３個	………

と、くっつけて並べて数えていくと、

始点からの個数が**距離**として認識され、



のような赤い**数直線**が生まれます。

このようにして、

位置としての数

が生まれた、と想像しても許されるでしょう

数直線の発明は、

数学の発展の大きな基です。

実に偉大な発明です。

1

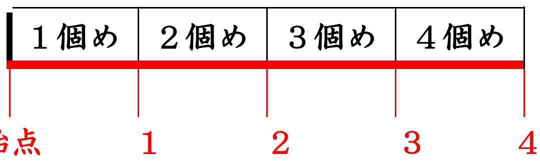
古エジプトやメソポタミアは
レンガを焼きました。

レンガ状のものを

１個	２個	３個	………

と、くっつけて並べて数えていくと、

始点からの個数が　　　として認識され、



のような赤い**数直線**が生まれます。

このようにして、

としての数

が生まれた、と想像しても許されるでしょう

2

0の発明

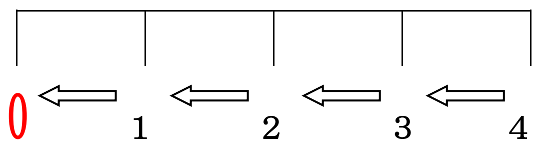
そうすれば、

始まりとして、

始点をどう表すかが考慮され

インドで発明されたように、

0 に到達するのも自然に見えてきます。



2

0の発明

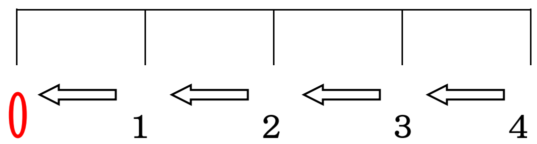
そうすれば、

始まりとして、

をどう表すかが考慮され

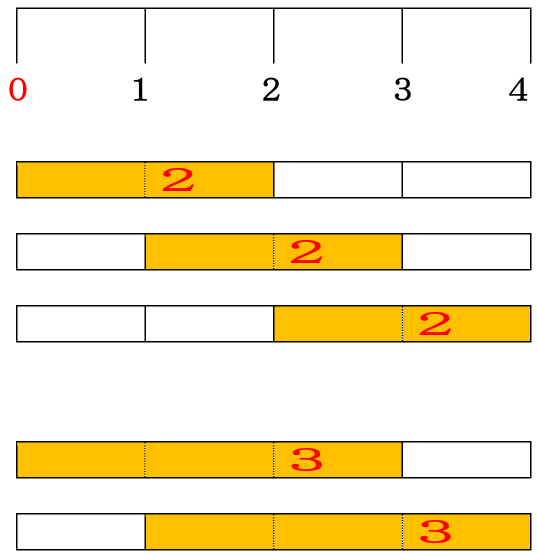
インドで発明されたように、

0 に到達するのも自然に見えてきます。



3

大きさとしての数。



どれもが同じ大きさの

２であったり、３であったりすること

が認められるようになります。

これは、

粒々のような個数を数える時にも

似たようなことは起こります。

しかし、

線分図ほど明確には

大きさをあらわしません。

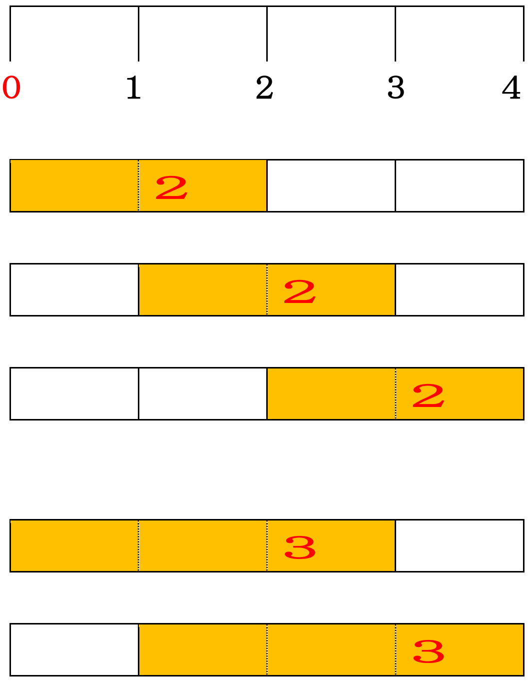
また、

次の**方向性のある大きさ**は

数直線に特有です、と言えましょう。

3

としての数。



どれもがの

2 であったり、3 であったりすること

が認められるようになります。

これは、

粒々のような個数を数える時にも

似たようなことは起こります。

しかし、

線分図ほど明確には

大きさをあらわしません。

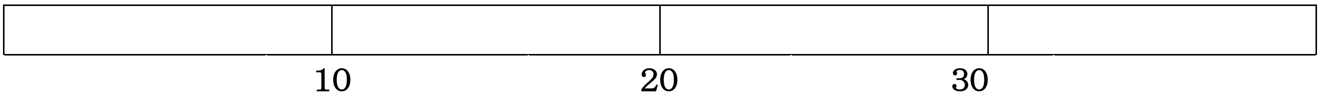
また、

次の[redacted]のある大きさは

数直線に特有です、と言えましょう。

がいすう
概数 およその数

およその数は、数直線のうえで、どちらに近いか、で考えると判りやすい。



11から29までの数が、
10に近いか、20に近いか、30に近いか、と考えてみよう。

14 は、10から4の距離。20から6の距離。**10に近い**。

15 は、10から5の距離。20から5の距離。10と20から**等距離**です。

16 は、10から6の距離。20から4の距離。**20に近い**。

24 は、20から4の距離。30から6の距離。20に近い。

25 は、20から5の距離。30から5の距離。20と30から等距離です。

26 は、20から6の距離。30から4の距離。30に近い。

問題は、

10と20から**等距離にある15**をどちらに近いと言うか、

20と30から等距離にある25をどちらに近いと言うか、

だけです。
大きく見せたい人々の習慣にしたがって、
大きい方に近いことにします。

真ん中以上は、大きい方にまとめ、

真ん中より小さい

（未満の）ところは、小さい方にまとめます。

一つ下の位の５が分かれ目ですから、

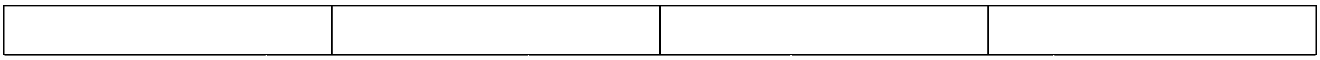
一つ下の位の５以上が大きい数にまとめられ、

一つ下の位の５未満が小さい数にまとめられます。

がいすう

概数 およその数

およその数は、数直線のうえで、どちらに近いか、で考えると判りやすい。



10　　20　　30

11 から 29 までの数が、
10 に近いか、20 に近いか、30 に近いか、と考えてみよう。

14 は、10 から 4 の距離。20 から 6 の距離。**10 に近い**。

15 は、10 から 5 の距離。20 から 5 の距離。10 と 20 から[redacted]です。

16 は、10 から 6 の距離。20 から 4 の距離。**20 に近い**。

24 は、20 から 4 の距離。30 から 6 の距離。20 に近い。

25 は、20 から 5 の距離。30 から 5 の距離。20 と 30 から等距離です。

26 は、20 から 6 の距離。30 から 4 の距離。30 に近い。

問題は、

10 と 20 から[redacted]**にある 15** をどちらに近いと言うか、

20 と 30 から等距離にある 25 をどちらに近いと言うか、

だけです。

大きく見せたい人々の習慣にしたがって、

大きい方に近いことにします。

真ん中[redacted]は、大きい方にまとめ、

真ん中より小さい

（[redacted]の）　ところは、小さい方にまとめます。

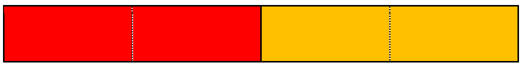
一つ下の位の５が分かれ目ですから、

[redacted]の５以上が大きい数にまとめられ、

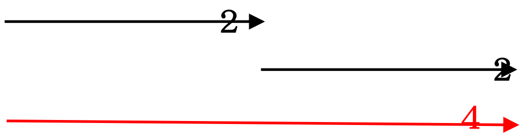
一つ下の位の５未満が小さい数にまとめられます。

ステップ カ 足し算

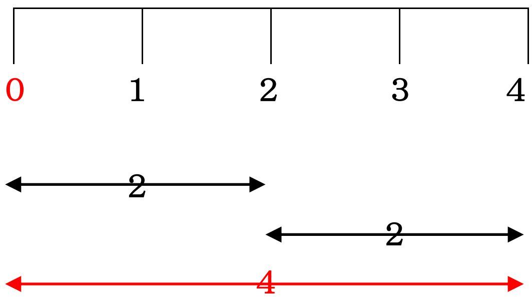
２ ＋２ ＝ ４ は
どのようなイメージでしょうか。



でしょうか。



でしょうか。



でしょうか。

色々に考えられるのですね。
数は、いろんな意味がある、
あるいは生まれてくる
と考えられます。

もちろん、
２個＋２個のように、
個数で考えることも出来ます。

上のどの場合も $\boxed{2+2 = 4}$
と表されます。

数は、
出来方の元を探ると
色々な意味があるのですが、
形式的には

$$2+2=4$$

という一つの型におさまります。

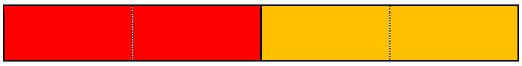
それゆえ、
「数学は形式だ」

とも言われるのですが、
数学は知らず、
算数の理解のためには
元に戻って数の出来方を考え、
色々な意味がある
と見ることが大切です。

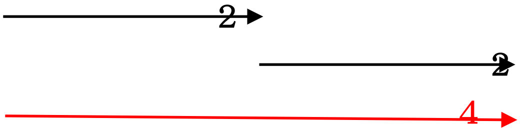
ステップ カ 足し算

$\boxed{2+2=4}$ は

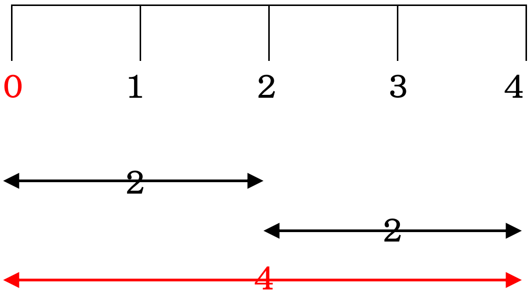
どのようなイメージでしょうか。



でしょうか。



でしょうか。



でしょうか。

色々に考えられるのですね。

数は、　　　　　　がある、

あるいは生まれてくる

と考えられます。

もちろん、
２個＋２個のように、
個数で考えることも出来ます。

上のどの場合も $\boxed{2+2 = 4}$
と表されます。

数は、
出来方の元を探ると
色々な意味があるのですが、
的には

$$2+2=4$$

という一つの型におさまります。

それゆえ、
「数学は形式だ」

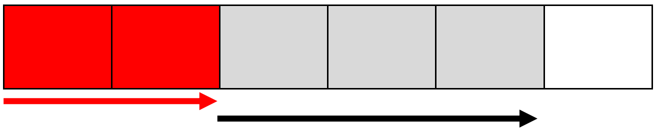
とも言われるのですが、
数学は知らず、
算数の理解のためには
元に戻って数の出来方を考え、
色々な意味がある
と見ることが大切です。

足すことの順序は

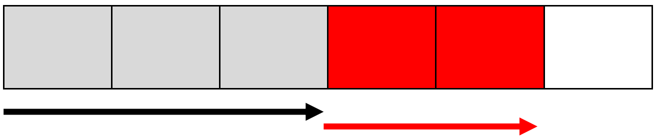
交換可能です

下の図から明らかなように、

+2　+3



＝+3　+2



数学は、『図から明らか』

と言うのを超えて、

言葉で説明しようとする傾向があります。

算数を学ぶ皆さんは、

「**図から明らか**」を

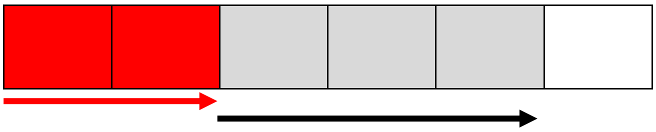
自信をもって使いましょう。

足すことの　は

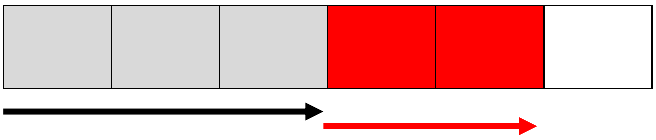
交換可能です

下の　なように、

+2　+3



＝+3　+2



数学は、『図から明らか』

と言うのを超えて、

言葉で説明しようとする傾向があります。

算数を学ぶ皆さんは、

「　明らか」を

自信をもって使いましょう。

ステップキ　引き算

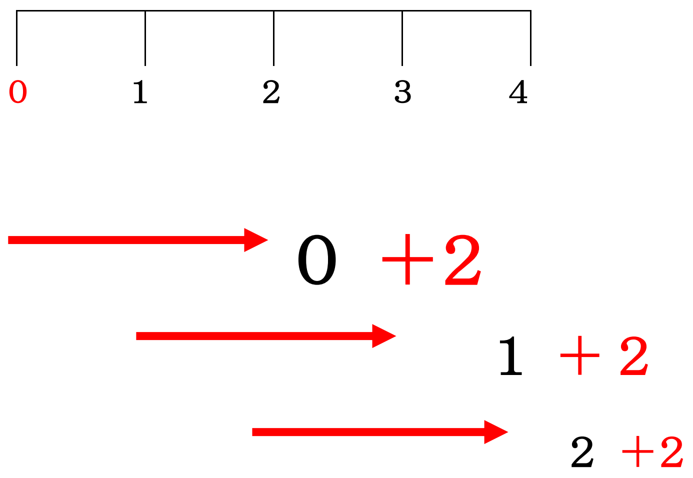
右と左のような
逆向きという考え方は
分かり易いですね。

算数を考えるとき
非常に
生産的です。

方向の有る数。

はじめは勿論、ステップカのように、
足す数としての右向きの数が
うまれたのでしょう。

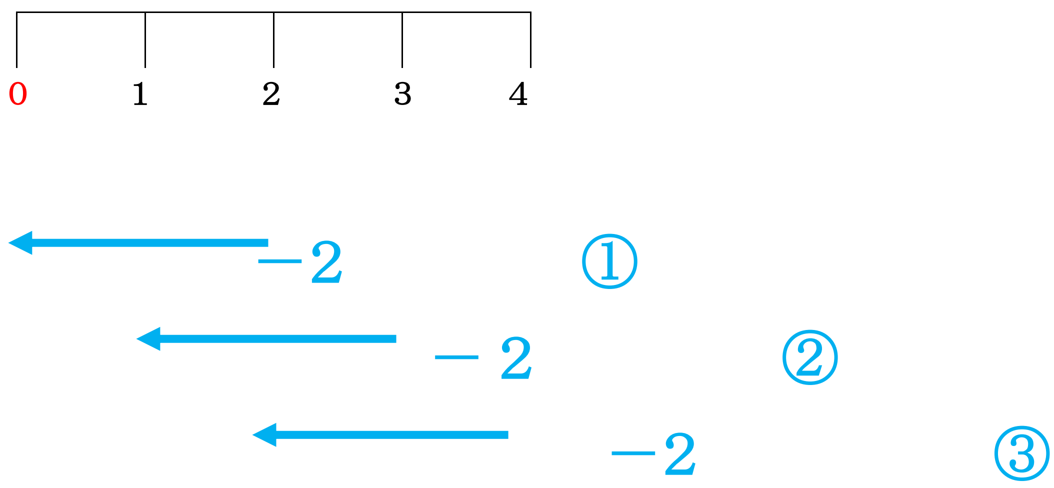
次の図を見てください。



次いで、

引く数としての左向きの数

が生まれることは想像できますね。



① $2-2=0$

② $3-2=1$

③ $4-2=2$

先ず初めに、

位置としてのゼロ

が考え出されたのでしょうが、

その後、

レンガを一つずつ取り去っていった時、

何も無くなった状態について

ゼロ！と考えることでしょうね。

位置としてのゼロと

なにも無い大きさとしてのゼロが

不思議にすんなりと判ります。

ステップ キ　**引き算**

右と左のような

という考え方は

分かり易いですね。

算数を考えるとき

非常に

です。

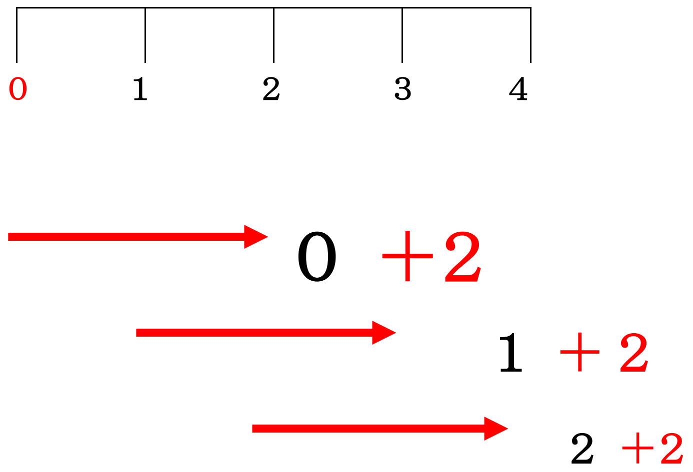
方向の有る数。

はじめは勿論、ステップ カ のように、

足す数としての右向きの数が

うまれたのでしょう。

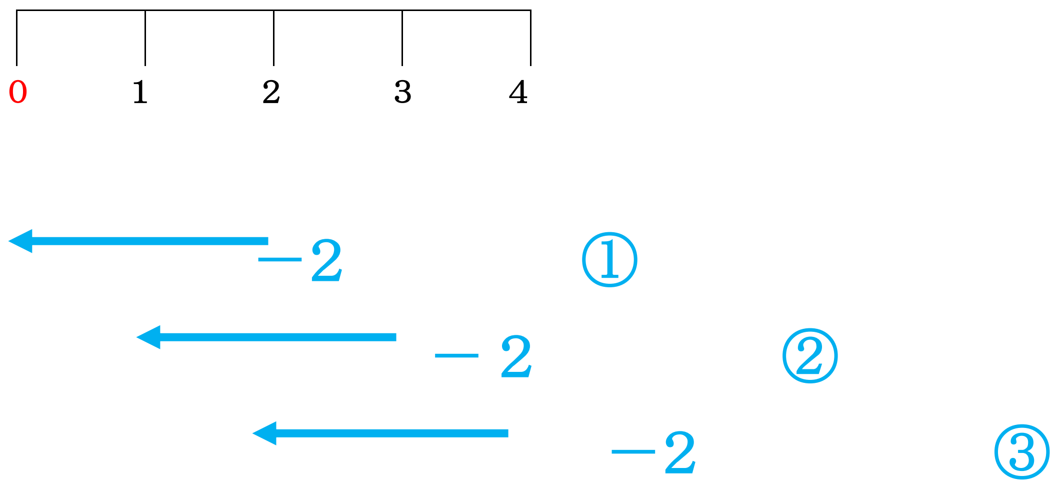
次の図を見てください。



次いで、

引く数としての左向きの数

が生まれることは想像できますね。



① $2-2=0$

② $3-2=1$

③ $4-2=2$

先ず初めに、

としてのゼロ

が考え出されたのでしょうが、

その後、

レンガを一つずつ取り去っていった時、

何も無くなった状態について

ゼロ！と考えることでしょうね。

位置としてのゼロと

なにも無い　としてのゼロが

不思議にすんなりと判ります。

引くことの順序は
交換可能です

例えば、

5 <ruby>−<rt>ひく</rt></ruby>1 の「<ruby>−<rt>ひく</rt></ruby>」は

５と１を結びつけているのでなく、

「後ろの１にくっついて働く記号」と考え、
「<ruby>−<rt>ひく</rt></ruby>1」をセットに考えます。

みなさんは

5 −3 −2 と

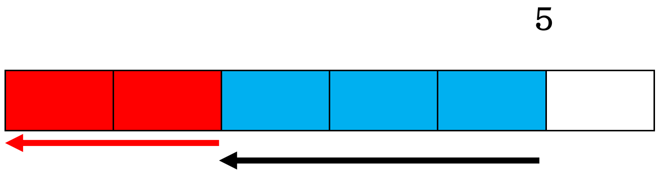
5 −2 −3 が一致することの

説明に図も類例も必要ないですね。

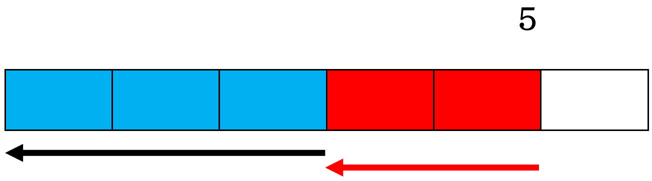
しかし、念のために次に図を見ましょう。

下の図から明らかなように、

$5 \quad -3 \quad -2$



$=5 \quad -2 \quad -3$



引くことの順序は

可能です

例えば、

5 －(ひく)1 の「－(ひく)」は

5と1を結びつけているのでなく、

「後ろの1にくっついて働く記号」と考え、
「－(ひく)1」をセットに考えます。

みなさんは

5 −3 −2 と

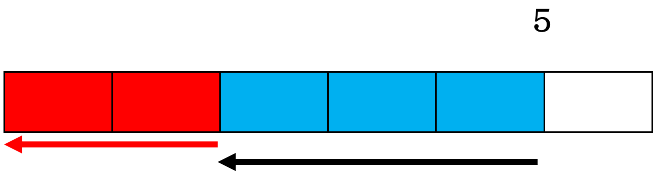
5 −2 −3 が一致することの

説明に図も類例も必要ないですね。

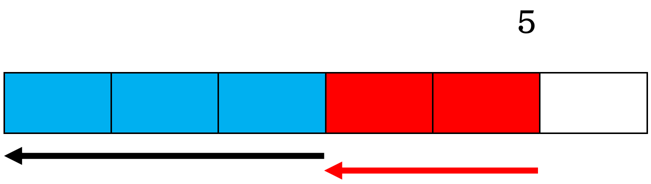
しかし、念のために次に図を見ましょう。

下の図から明らかなように、

$5 \quad -3 \quad -2$



$=5 \quad -2 \quad -3$



数学は、『図から明らか』

と言うのを超えて、

言葉や数式で説明しようとする傾向があります。

たいへん面倒で難しくなる場合が多いのです。

算数を学ぶ皆さんは、

「図から明らか」を

自信をもって使いましょう。

そうすれば、

算数はよほど解りやすくなります。

ついでながら、このように図を使えば、

中学数学領域の負の数もごく簡単に

その存在を想像することが出来ます。

つまり、

０から右へ１、２、３と数えたとしたら、

０から左へ１、２、３　は

どう表しましょうか、のことなのです。

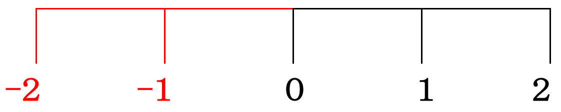
数直線で数を考えるようになると、

右方向の数、

左方向の数などと考え、

逆向きの数

負の数の発見にもつながります。

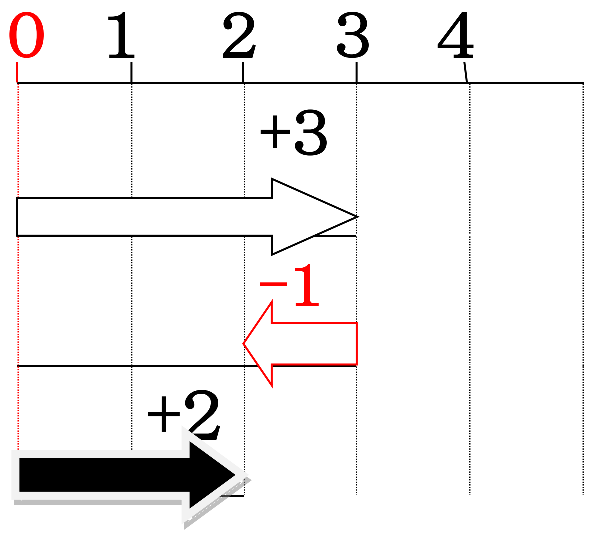


向きのある線で

$$\overset{\Rightarrow}{3}\quad \overset{\leftarrow}{1} = \overset{\Rightarrow}{2}$$

の加減も可能ですね。

図にすれば



数学は、『図から明らか』

と言うのを超えて、

■や■で説明しようとする傾向があります。

たいへん面倒で難しくなる場合が多いのです。

算数を学ぶ皆さんは、

「図から明らか」を

自信をもって使いましょう。

そうすれば、
算数はよほど解りやすくなります。

ついでながら、このように図を使えば、
中学数学領域の負の数もごく簡単に
その存在を想像することが出来ます。
つまり、
０から右へ1、2、３と数えたとしたら、
０から■へ1、2、３　は
どう表しましょうか、のことなのです。

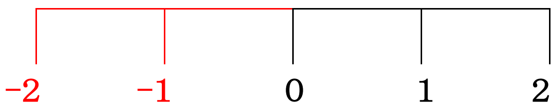
数直線で数を考えるようになると、

右方向の数、

左方向の数などと考え、

向きの数

の発見にもつながります。

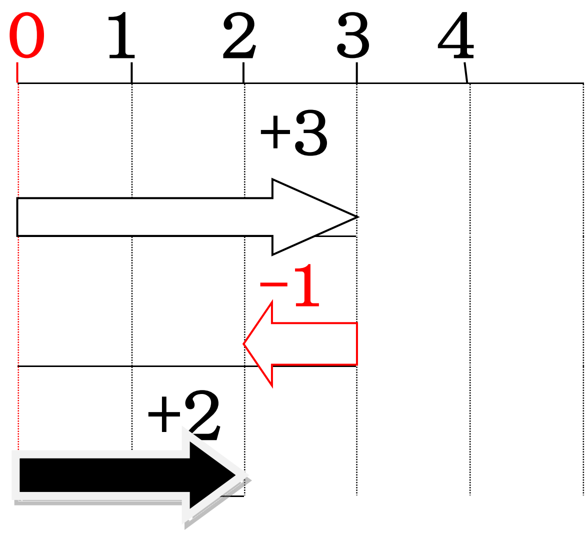


向きのある線で

$$\overset{\Rightarrow}{3}\quad \overset{\leftarrow}{1} = \overset{\Rightarrow}{2}$$

の加減も可能ですね。

図にすれば



かんたんなようで、

ちょっとややこしい計算があります。

例えば、

1時から４時までは何時間ありますか、

という問いには、

4-1＝3　３時間ですね。

では、

１日(ついたち)から4日(よっか)までは何日有りますか。

計算しなくとも、４日間です。

4－1　ではありませんね。

８時から 10 時までは、

10－8＝2　２時間。

しかし、

8日から10日までは、３日です。

10－8＝2　２日ではダメです。

何故でしょう。

かんたんなようで、

ちょっとややこしい計算があります。

例えば、

1時から4時までは何時間ありますか、

という問いには、

＝3　時間ですね。

では、

1日から4日までは何日有りますか。

計算しなくとも、日間です。

4－1　ではありませんね。

８時から10時までは、

10－8＝2　２時間。

しかし、

8日から10日までは、3日です。

10－8＝2　２日では　　です。

何故でしょう。

１時や４時は、

時の　　　　　　を表していますが、

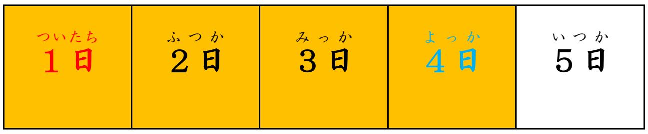
１日や４日は、

１点ではなく、　　　　　が有ります。

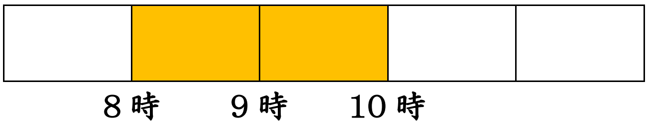
線分図で考えると良く見えます。

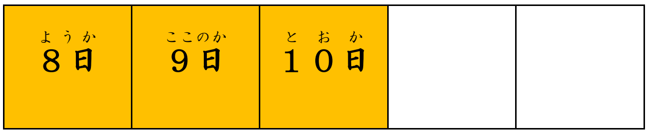
１時から４時の場合

ついたち　よっか
1日から4日の場合



同じように、





ステップ ク

たし算と引き算の混合

加法の交換法則とは。

小学校では、ふつう

足し算は
符号＋の前後の数字は交換できるが、
引き算は、
符号－の前後の数字は交換できない

と理解されています。

しかし、

$$10 \quad +3 \quad -2$$

$$=10 \quad -2 \quad +3$$

です。

それゆえ、ここで次のように考えます

たす ＋3	ひく －2

の場合、

＋や－は、

符号の前後の数を結び付ける

ものでなく、

＋は、後ろの３と結び付き、

－も、後ろの２と結び付く、

とします。

そして、

足し算を足すことと呼び

引き算を引くことと

呼ぶことにします。

足すこととと引くこととは

その順序は交換できるのです。

例えば、

13　＋2　－3は

13　＋2　－3と見て、

「13に、2を足し、3を引く」と

読むことにします。

そして

「2を足すこと」と「3を引くこと」

の順を交換し、

13　－3　＋2

「13から、3を引き　2を足す」と

することができる、とするのです。

別に何の問題もありませんね。

$\boxed{3\ -\ 2}$ は、

３の前に＋が有ると見て、

$\boxed{+3\ -2}$ 、

さらに０を補って、

$\boxed{0}\ \boxed{+3}\ \boxed{-2}$

$=\boxed{0}\ \boxed{-2}\ \boxed{+3}$

先の $\boxed{3-2=-2+3}$ は

上のことから明らかになります。

用語として、

加減は順序交換可能

と呼びましょう。

算数の得意な子どもは勝手にやっていますが、

加法の交換法則という名称が、

中学１年生の負の数の学習を困らせている例を多々見ます。

ステップ ク

たし算と引き算の混合

の交換法則とは。

小学校では、ふつう

足し算は
符号＋ の の数字は交換できるが、
引き算は、
符号－ の前後の数字は交換

と理解されています。

しかし、

$$10 \quad +3 \quad -2$$

$$=10 \quad -2 \quad +3$$

です。

それゆえ、ここで次のように考えます

＋3（たす）　−2（ひく） の場合、

＋や−は、

符号の前後の数を結び付ける

ものでなく、

＋は、後ろの３と結び付き、

−も、後ろの２と結び付く、

とします。

そして、

足し算を　　と呼び

引き算を　　と

呼ぶことにします。

足すこと と 引くこと とは

その順序は　　　　のです。

例えば、

13 ＋2 －3 は

13 ＋2 －3 と見て、

「13 に、2 を足し、3 を引く」 と

読むことにします。

そして

「2 を足すこと」 と 「3 を引くこと」

の順を交換し、

13 －3 ＋2

「13 から、3 を引き　2 を足す」 と

することができる、とするのです。

別に何の問題もありませんね。

$\boxed{3 - 2}$ は、

３の前に＋が有ると見て、

$\boxed{+3 -2}$ 、

さらに０を補って、

$\boxed{0}\ \boxed{+3}\ \boxed{-2}$

$=\boxed{0}\ \boxed{-2}\ \boxed{+3}$

先の $\boxed{3-2=-2+3}$ は

上のことから明らかになります。

用語として、

$\boxed{}$ は順序交換可能

と呼びましょう。

算数の得意な子どもは勝手にやっていますが、

加法の交換法則という名称が、

中学１年生の負の数の学習を

困らせている例を多々見ます。

まとめると、

	基本	順序交換可能
の順	●　＋2	0　＋2　＋6 ＝　0　＋6　＋2
足し算の逆 の	●　－2	●　－2　－6 ＝●　－6　－2
足し算・引き算 の	●＋6－2	●　＋6　－2 ＝●　－2　＋6

ステップ ケ

足し算と引き算の複合

6を足して、
さらに2を足すとき
6と2を足した8を足しても
同じことです。

$$0\ +6\ +2$$
$$=0\ +(6+2)$$

6を足して、次に2を引くとき
6から2を引いた4を足しても
同じことです。

$$0\ +6\ -2$$
$$=0\ +(6-2)$$

6を引いて、さらに2を引くとき
6と2を足した8を引いても
同じことです。

$$●\ -6\ -2$$
$$=●\ -(6+2)$$

ここまでは、かんたんでしょう。しかし、
次は、ちょっと考えなければなりません。

10を引いてから1を足すとき、

10から1を引いた9を引いても

同じことです。

$$\bullet \; -10 \; +1$$
$$= \bullet \; -(10-1)$$

これの感覚が、

乗除のときにも重要になります。

大事なところですから、
次ページで少し練習しましょう。

$\boxed{ー9}$の代わりに、（$\boxed{9}$＝$\boxed{10－1}$ですから）

$\boxed{ー（10－1）}$として、

さらに、$\boxed{－10\ ＋1}$　と考えると、

便利な計算がたくさんあります。

　例えば、

−98　ならば、

－（100−2）＝−100　+2

とするのです。

98を引くより

100を引いてから２を足す方が

断然計算しやすいですね。

下の説明文を読み、計算をしてみてください。

10 から 4 を引いて、1 を足すことは、

10 から、(4 から 1 を引いた数 3)を引くことと同じ。

$$10 - 4 + 1 = 7$$

$$10 - (4 - 1) = 7$$

---

14 から 4 を引いて、1 を足すことは、

14 から、(4 から 1 を引いた数 3)を引くことと同じ。

$$14 - 4 + 1 = 11$$

$$14 - (4 - 1) = 11$$

下の説明文を読み、計算をしてみてください。

10 から 4 を引いて、1 を足すことは、

10 から、([redacted]を引くことと同じ。

$$10\ -4\ +1\ =7$$

$$10-\text{[redacted]}=7$$

---

14 から 4 を引いて、1 を足すことは、

14 から、[redacted]を引くことと同じ。

$$14\ -4\ +1\ =11$$

$$14-\text{[redacted]})=11$$

15から5を引いて、1を足すことは、

15から、$\boxed{\qquad}$を引くことと同じ。

$$15-5\ +1\ =11$$

$$15-\boxed{\qquad}=11$$

16から6を引いて、1を足すことは、

16から、$\boxed{\qquad}$を引くことと同じ。

$$16-6\ +1\ =11$$

$$16-\boxed{\qquad}=11$$

15から5を引いて、1を足すことは、

15から、　　　　　　　　を引くことと同じ。

$$15-5\ +1\ =11$$

$$15-\qquad=11$$

16から6を引いて、1を足すことは、

16から、6から(　　　　　数5)を引くことと同じ。

$$16-6\ +1\ =11$$

$$16-\qquad=11$$

16から [redacted] ことは、

16から、(6から2を引いた数4)を引くことと同じ。

$$16-6+2=12$$

16－ [redacted] ＝12

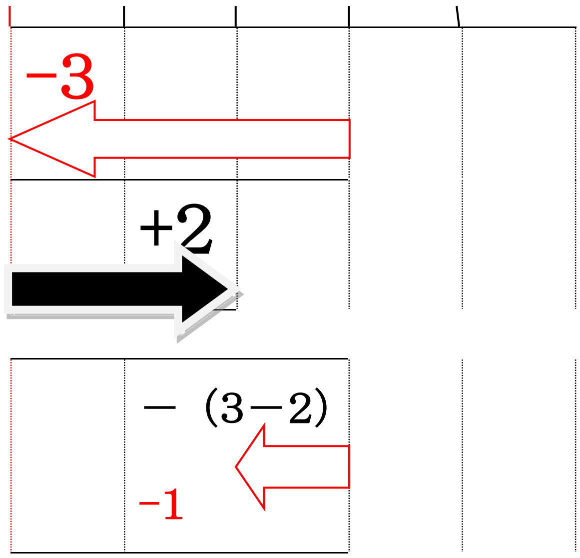
16から6を引いて、5を足すことは、

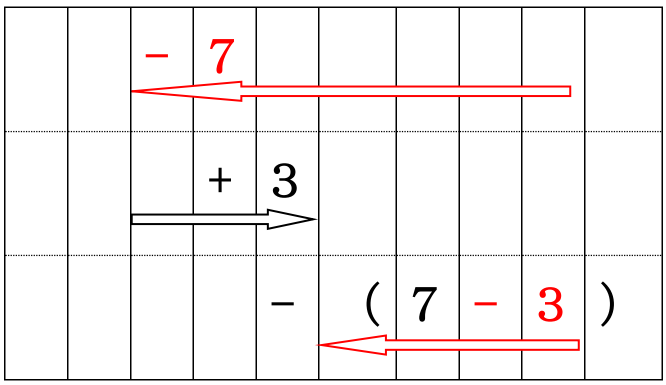
16から、 [redacted] 引くことと同じ。

16 [redacted] ＝15

$$16-(6-5)=15$$

図解してみましょうか。





ステップ$\boxed{\text{コ}}$：**備考**

今見てきたとおり、

数える物をバラバラに置くのでなく、

並べて数える方法にすると、

数直線が出来ます。すると、

位置としての数、

大きさとしての数や、

向きのある数など

様々な数を**創る**ことが出来ました。数の発明ですね。

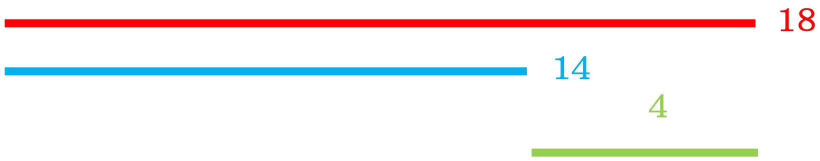
中学数学の負の数へもあと一歩です。

最大公約数の求め方

大が 18 で、小が 14 のとき、

最大公約数は、必ず 18－14 の差 4 より小さい。

これを数直線で説明すると、



最大公約数が

18 と 14 の差の 4 より大きいと、

仮に、

4 が小 14 の約数であるとしても、

次の数は、

18 を超えてしまうので、

18 の約数にはなり得ないので、

公約数が、

差の 4 より大きいことは考えられない。

大が 18 で
小が 8 のとき、
18−8＝10 で、
小 8 が差 10 より小さいので、
最大公約数は、
必ず小の 8 より小さい。

もし、

最大公約数が小の８より大きいと、

８の約数になり得ない。

つまり、

最大公約数は、

大−小＝差　とすると、

小が、差より小さい時は、小の約数の中から探し、

差が、小より小さい時は、差の約数の中から探す。要するに、

小と差の小さい方の数の約数の中に最大公約数がある。

最大公約数を探すときは、小と差の大小を調べて、

小さい方の数の約数の中から探すのである。

この単元をまとめて言うと次の通りです。

提案　数の再発見　か　個数を数えて **数直線へ**

未開社会は文明社会になって、
いや、自然中心社会は人工社会になって、

同じ形

同じ大きさ

の物を作り、
その個数を数えることが出来るようになって

等倍の考え方発達の道に入りました。

そして正確な**等分**概念にもたどり着きます。

さらに

直方体状の物を
並べて数え
数直線という
偉大なる発明へと進んだのです。

人工社会は、

同じ大きさ

を数える段階へと進んだとき、

1		1		1		1		
●	＝	●	＝	●	＝	●	………	

どれもが同じ１であることに気付きました。
同じ大きさだから、この段階で
どこを数えても２個は２個　となりました。

また、

足し算の代わりとしての

掛け算が可能です。

しかし、この掛け算は

数そのものの倍感覚ではありません。

自然数の倍感覚は、

「足し算の代わりとしての倍、

**　論理の積み重ねの倍」ではなく、**

直感的な感覚で倍感覚を

獲得しなければなりません。

詳しくはあの所で述べました。それを踏まえながらの
かの数直線への道です。