D- c　比を考える

サ

●が５円ならば、 ●●は何円か。

●	●●
５円	？

？は何円か。

●●は、

●の２倍ですから、

値段も２倍、すなわち

５円×2　です。

●が２個は、

●×2＝●●　と考えるのは

同じ形・同じ大きさ

を数える時に、

出来上がる考え方です。

●の個数ではなく、
数字で表すと次の通りです。

個数	１個	２個
金額	５円	？

？は**何円**か。

２個は、
１個の２倍ですから、
値段も２倍。すなわち、
５円×2

注意

この問題を
●●＝●＋●　と
足し算で考えて、
５円＋5円＝10円
と考える人は
比を理解できません、

●が５円ならば、
●●●は**何円**か。

●	●●●
５円	？

？は**何円**か。

●●●は、
●の３倍ですから、
値段も３倍、すなわち
５円×３　です。

●が３個は、

●×3＝●●●　と考えるのは

同じ形・同じ大きさを数える時に、

出来上がる考え方です。感覚です。

それは、複雑な論理を**必要としません。**

●の個数ではなく、
数字で表すと次の通りです。

個数	１個	３個
金額	５円	？

？は何円か。

３個は、
１個の３倍ですから、
値段も３倍。すなわち、
５円×3

注意

この問題を
●●●＝●＋●＋●　と
足し算で考えて、
５円＋5円＋5円＝15円
と考える人は
比を理解できません、

1	⇒	2
10	⇒	20
100	⇒	200

上の ⇒ に

共通する意味は何でしょうか。

1が、2になるためには、

+1か、2倍です。

10が、20になるためには、

+10か、2倍です。

足し算で考えると一致しません。

この2つをくらべた時、

+1や　+10は、一致していませんから、

⇒に共通するのは2倍です。

そして、

200も、100の2倍です。

２倍ということが一致していますので、

	1	⇒	2
＝	10	⇒	20
＝	100	⇒	200

のように、＝を使って、

２倍ということが一致していることを表すことにしましょう。

次の　　に適当な数をいれなさい。

	5	⇒	10
＝	6	⇒	イ
＝	30	⇒	ウ

イ	ウ
12	60

小学２年生の
かけ算の問題を考えてみましょう。

物を、「1つ、２つ、３つ」
と数える最初に、
「 １つ ＋ １つは ２つ」
「 ２つ ＋1つ は３つ 」だけでなく、

「2つは、１つの２倍、
３つは、１つの３倍」を意識するように
学習してほしいのです。

注意

ちょっと判りにくいかも知れませんが、

数学では、

数の倍関係を考える時、
元(もと)にする量を後ろに置く

とする約束が有るのです。

これは、

6÷2＝3

60÷20＝3

600÷300＝3　とは、

割る数を１とすると、

割られる数はその３倍

であることを示しています。

つまり、

元にする量を後ろにおいているのです。

ふつうに話す日本語では、
そのような約束は有りませんから、
まずは、日本語順で比を考えます。

元にする量を前に置きます。

１本が５円のエンピツは、 ２本では何円ですか。

１本	本数が２倍 ⇒ だから	２本
５円	値段も ⇒ ２倍	５円×2

これは、右側が、**本数**も**値段**も
左側の２倍という点が同じなので、

１本	⇒	２本
＝　５円	⇒	５円×2

＝を使って表すことにします。

これを、

次のように表すと６年生で学ぶ

比の形です。

１本	：	２本
＝　５円	：	５円×2

⟹ も、 ： も

違いはありません。

１本	：	２本

は、「1 本対２本」と読む約束です。

同様に、

１本が５円のエンピツは、 ３本では何円ですか。

１本	本数が ３倍	３本
５円	値段も ３倍	５円×3

これを、

右側が、本数も値段も

左側の３倍という点が同じなので、

１本	⇒	３本
＝　５円	⇒	５円×3

＝を使って表すことにします。

さらに、これを、

次のように表すと６年生の課題です。

１本	:	３本
＝　５円	:	５円×3

これらは、

すでに判っていることの

別の表し方に過ぎないので、
目新しいことは記号だけです。

１本	**：**	**３本**

は、「１本対３本」と読みます。

さて、次に、

3年生のわり算

2	÷	1	＝	2
4	÷	2	＝	2
6	÷	3	＝	2

20	÷	10	＝	2
40	÷	20	＝	2
60	÷	30	＝	2

ですから、

	2	÷	1
＝	4	÷	2
＝	6	÷	3
＝	20	÷	10
＝	40	÷	20
＝	60	÷	30

と＝を使って表せますね。

これを覚えておいて、

つぎの文 シ を読んでください。

シ

2本が10円のエンピツは、
1本では何円ですか。

2本	⇒ 本数が半分 だから ⇒ 値段も半分	1本
10円		10円÷2

これを、
右側が、本数も値段も
左側の半分という点が同じなので、

2本	⇒	1本
＝　10円	⇒	10円÷2

＝を使って表すことにします。

さらに、これを、

次のように表すと６年生の学習課題です。

２本	：	１本
＝10 円	：	10 円÷2

判っていることの別の表現に過ぎないので、

難しいことはありませんね。

３本が 15 円のエンピツは、 １本では何円ですか。

３本	⇒ 本数が ３分の１	１本
15 円	⇒ 値段も ３分の１	15 円÷3

これを、

右側が、本数も値段も

左側の３分の１という点が同じなので、

３本	⇒	１本
＝ 15 円	⇒	15 円÷3

＝を使って表すことにします。

さらに、これを、次のように表すと
６年生の比の学習です。
表し方が新しいだけで、
中身は新しくありません。

３本	：	１本
＝　15 円	：	15 円÷3

⇒と ： との違いだけです。
判っていることの別の表現に過ぎません。

ス

今見てきた、

割り算シと、掛け算サの問題を

組み合わせると、

次の問題が解決出来ます。

２本が 10 円のエンピツは、 ３本では何円ですか。

２本	３本
10 円	

このままでは、少し難しいですね。

しかし、**間**に、

「**１本は何円か**」を組み込みます。

３本	１本	２本
15 円	15 円÷3	15 円÷3×2

わり算と掛け算の組み合わせです。

これらをいくつかやった後、

２本		３本
30円		

を見れば、

間に１本を自分の力で入れられるようになるでしょう。

２本	３本
30円	

間に１本を置くことに気付いた後は、

２本	３本
10円	

と間に枠（わく）が無い場合も、

１本をはさんで考えられますね。

これを、

２本　：　３本
＝10円　：（　　　）

と表せば、６年生の学習課題です。

何の場合もそうですが、

判っていることを、

新しい表現にすることから始めれば、

問題はずっとかんたんになります。

この様な、

整数の問題から始めて、

2 dL	3 dL
10 円	円

のように、

一方が dL などの連続量の問題へ。

次に、両方が連続量の問題へ。

2 dL	3 dL
10 g	g

6 年生の課題は連続量、ですが、

以前に学んだことから比の形を学べば、

値段でなく、ｄＬ(デシリットル) や ｇ(グラム) も

かんたんに判りますね。

2 本	：	3 本
＝ 10 円	：	15 円

知っていることの**別の表現**

というだけの話です。

大切なのは、

２本が３本になるのは、

１本増える、と考えるのでなく、

$\boxed{\div 2 \quad \times 3}$

と見ることの訓練です。

2：5 は、 ÷2 ×5

3：2 は、 ÷3 ×2

3：5 は、 ÷3 ×5

として変化していることに着目することです。

多分、比を学んでいない時も、

君たちの大部分は、そのことに気づき

使っていたに違いありません。

そして、

どんな大きな数でも同じようにできる、

と考えることができるようになれば、

君の感覚は、
数学法則を感じ取った
といえるでしょう。

どんな数でも同じようにできる
と考えることができるようになれば、
法則を使って、
かんたんに問題を解くことができます。

少し、文字を使って考えてみましょう。

$\boxed{2 : n}$ は、

$\boxed{2 : 1 : n}$

2 が n になるためには

$\boxed{\div 2 \quad \times n}$

さらに、

$\boxed{m : n}$ は、

$\boxed{m : 1 : n}$

m が n になるためには

$\boxed{\div m \quad \times n}$

と考えられるようになってほしい。

もし、

$\boxed{m : n}$ を、

mにいくらかの数を足す

と考えて

$\boxed{\div m \quad \times n}$

とは考えにくい人は、

2：5は、÷2 ×5

3：2は、÷3 ×2

3：5は、÷3 ×5等の問題を、

数字を変えて

幾つも幾つも試してみてください。

ある時、

『あっそうか』と思える日がきます。

算数学習のコツは、
自分に判る具体数でいくつも練習し、
そこに見えてきた法則が、
どのような大きな数にでも使える、
と思えるまで繰り返すことです。

どのような大きな数にでも使える法則、
と理解できたら、
文字式化の練習をしましょう。

３本	：	２本
＝ 60円	：	60円÷3 ×2

などの同じ型の問題を作って、
幾つも練習していると、
次のような**文字の問題**でも
答えられるようになります。

ｍ本	：	ｎ本
＝Ａ円	：	Ａ円 ÷ｍ×ｎ

文字で考えられるようになったら、
どのような数になっても、
間違いなくできるようになります。

セ

m	：	n
＝A	：	A÷m×n

ができるようになれば、

いよいよ６年生の課題、

分数表示の学習です。

分数表示の部分は、

D−あで詳しく見ていますから、

そちらで確認してください。

ここでは、文字式の表現だけに

しておきます。

m	:	n
＝A	:	A÷m×n

÷m×n

（$\boxed{\text{わることと}}$と$\boxed{\text{かけることと}}$の

順序は変更できるので）

＝ ×n ÷m

（÷m（わるエム）は、英語では ／ m（パー）と表す）

＝ ×n /m

（/mは、算数では$\frac{}{m}$と表すので）

$$= \times \frac{n}{m}$$

÷m　×n　が、順序交換で

×n　÷m　となるのを除けば、

あとは、表現形式の約束事にすぎない。

次の変化は、
いささか準備が必要です。

$$\div m \times n$$

$$= \boxed{\div(m \div n)}$$

$$= \div(m / n)$$

$$= \div\frac{m}{n}$$

となることの理解は、
分数計算の理解が必要のように
考える人も居ると思いますが、
これも、あくまでも、
整数計算と表記法の問題です。

$$\boxed{\div m \times n}$$

面倒なのは、

上の式が下の式に変わるところだけです。

$$= \boxed{\div(m \div n)}$$

Bシリーズの整数編で

数多くの類例を示しています。

そちらで理解してください。

少しだけ説明しておきます。

「８で割った商を２倍すること」と、
「割る数の８を２分の１にすること」が
同じことになることの理解です。

しかし、
これはかなり手こずる子たちが居ます。

繰り返し、類似の問題を解いて、
実感してもらわねばなりません。

今示したことが出来れば、

÷分数と、×分数の関係が

整数のわり算と掛け算の

組み合わせと同じに過ぎないこと

が判ります。

この式と＊

$$\boxed{\div \mathrm{m} \quad \times \mathrm{n}}$$

$$= \boxed{\times \frac{n}{m}}$$

と

＊この式は同じ

$$\boxed{\div \mathrm{m} \quad \times \mathrm{n}}$$

$$= \div(\mathrm{m} \quad \div \mathrm{n})$$

$$= \boxed{\div \frac{m}{n}}$$

の最後の分数計算どうしは、

元が等しいので、

$$\times \frac{n}{m}$$

$$= \div \frac{m}{n}$$

上下を逆にすれば、

$$= \begin{array}{c} \div \dfrac{m}{n} \\ \times \dfrac{n}{m} \end{array}$$

かの有名な、

『割る分数問題、

分母と分子をひっくり返して掛ける』

理由は、

ここに示されるわけです。

要するに、

$$\times \frac{n}{m} = \boxed{\div m} \boxed{\times n}$$

であり、

$$\div \frac{m}{n} = \boxed{\div m} \boxed{\times n}$$

つまり、元が同じなのです。

分数は、

整数乗除の複合

と見ることにより

分数演算の不思議は解決されます。

ソ−1

比の値と割合

一般に、

比の値とは、 比の前項を 後項で割った値 です。

といって、**比の値**を導入します。

ちょっと頭ごなしで
受け入れがたいのです。
「何故、前項を後項で割るの」
と思ってしまいます。

前項÷後項の計算をして出てきた値は、
何なのでしょうか。
比の値です、では
言葉の言い換えにすぎません。

これは、小学３年生の問題、

２本が 10 円の物、 １本の値段は何円かを 10 円÷2 と答える

のと同じ問題をふくんでいます。

計算式上、１本の役割が見えないのです。

これは、

２本	⇒	１本
10 円	⇒	１０円÷2

比では、

２本の２分の１が１本だから、

値段も 10 円の２分の１と考えます。

小学三年生の解答式としては、

本数の方は当たり前だからとして省略、 値段の方だけ立式して示す習慣です。

本数の比関係という
隠れた意識が有ることに気付くかどうか、
が算数の得意不得意の分かれ道なのです。

比の形、４つの数で表せば、
なぜその数で割るのかが見えます。

次のように考えてみましょう。

	2	：	3
	÷3	＝	÷3
＝	$\frac{2}{3}$	：	1

後項３を、後項３で割って 1。

前項２も、後項３で割って$\frac{2}{3}$ 。

つまり、

比の後項を、
後項で割り
１とし、

比の前項も
後項で割り、
其の値を比の値と呼ぶ。

比の値とは、

独立した「前項÷後項」ではなくて、

前項	÷	後項	＝	比の値
後項	÷	後項	＝	1

前項も後項も、
後項で割ったときの
「前項の値」と考えれば、
後項を基（もと）（1）にしたときの
前項の割合であることが
理解されます。

たぶん、
比の値を考え始めたときは
後項のことも考えていたのでしょう。

それが、
１本 10 円ならば、２本は 10 円×2
となったように、
略式の好きな数学のいつもの癖で、
後項のことは、言わずもがな、
で略されたのだと思われます。

略された形のままその意味を考えるのは、
子どもばかりでなく
大人にもかならずしも簡単ではありません。

略さない形で考え、
略してこうなる、
と見ると断然かんたんになります。

今、比の値の説明で、いきなり
比の値が分数になる例を挙げました。
判りにくい人は、
次の問題を練習してください。

	6	：	3
	÷ 3	＝	÷ 3
＝	2	：	1

	6	：	2
	÷2	＝	÷2
＝	3	：	1

	12	:	3
	÷3	=	÷3
=	4	:	1

新しいことは、

既に知っていることをもとに考えると、

解りやすくなります。

ついでながら、
学習上大切なことは、
どんなに易しく思えても、
一つの例で結論付けない事です。

教科書は、
いきなり結論であったり、
例示一つで結論に至る、のは、
ページ数の問題です。

教科書無償の制度が、
一人歩きして、
望ましい考えの教科書が出来ないシステム
になっています。
一見価値のある制度が、
困った現象の元になっている、
といった例の一つです。

教科書が
例示一つの手本になっているので、
以下みんな「右へ倣(なら)え」で、
だれも困ったことだと思いません。
困ったことです。

学校の先生に、
略されたところの説明を期待する、
といったことになっているのかも
知れません。

$\boxed{\text{ソ−2}}$　比の利用

$\frac{1}{3}$m（メートル）が６ｇ のテープは、 １ｍ（メートル）は何ｇか。

少なくとも、
２つの考え方がある。

	$\frac{1}{3}$m	：	1m
＝	６ｇ	：	ｇ

A案

1m の ３分の１ は、$\frac{1}{3}$m だから、

1m は、$\frac{1}{3}$m の３倍。

だから、**重さも３倍で18g。**

B案

$\frac{1}{3}$を$\frac{1}{3}$で割ると

1だから、

6gも$\frac{1}{3}$でわって、

18g。

$\frac{2}{3}$ m（メートル）が

12ｇのテープは、

1mは何ｇか。

少なくとも、

３つの考え方がある。

A案

	$\frac{2}{3}$m	：	$\frac{1}{3}$m	：	1m
＝	12g	：		：	g

$\frac{2}{3}$mの２分の１が$\frac{1}{3}$mだから、

12gを２等分して６g。

$\frac{1}{3}$mの３倍が１mだから、

６gを３倍して18g。

まとめて、

$$12 \boxed{\div 2 \quad \times 3}$$

$$=18$$

Ｂ案

$12 \quad \div 2 \quad \times 3$……………①

（かけることと割ることの順序は入れかえられるから）

$= 12 \quad \times 3 \quad \div 2$……………②

（$\div 2$ は、英語風に表すと　$/2$）

$= 12 \quad \times 3 \quad /2$

（$/2$ は、古代エジプト風に表すと　$\overline{2}$　）

$= 12 \quad \times 3 \quad \times \overline{2}$　　　　（現代算数風に表すと）

$= 12 \quad \boxed{\times \frac{3}{2}}$

①式が②式へ進むところだけが数学的。

あとは、表現形式だけの問題にすぎない。

まとめると、$\frac{2}{3}$の **逆数** $\boxed{\frac{3}{2}}$ **を掛ける**。

Ｃ案

12　÷2　×3……………①

（2 で割った商を３倍することと
割る数の２を３分の１にすることは同じ）

＝12　÷（2÷3）　……………②

（÷3 は、英語風に表すと　/3）

＝12　÷　（2 /3）

（現代算数風に表すと）

$$=12\boxed{\div\frac{2}{3}}$$

慣れてくれば、

$\boxed{\frac{2}{3} \div \frac{2}{3} = 1 \text{だから}}$、

も使えるようになるでしょう。

実は、先に述べたように、

Ｂ式もＣ式も

Ａ案

$12 \boxed{\div 2 \quad \times 3} = 18$

の変形に過ぎない。

分数で量が示されると、
かなり難しく感じられますが、
基本は同じです。

次の問題を見てください。

$\frac{2}{3}$m が $\frac{5}{7}$ g のテープは、
1m当たり何gか。

前問と同じように、３つの考え方がある。

Ａ案

$\frac{5}{7}$g を２等分して $\frac{5}{14}$g

$\frac{5}{14}$g を３倍して $\frac{15}{14}$g

まとめて、

$\frac{5}{7}$g　÷2　×3　＝　$\frac{15}{14}$

	$\frac{2}{3}$m	：	$\frac{1}{3}$m	：	1m
＝	$\frac{5}{7}$ g	：	$\frac{5}{14}$ g	：	$\frac{15}{14}$ g

Ｂ案

$$\frac{5}{7}\text{g} \quad \div 2 \quad \times 3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$= \frac{5}{7}\text{g} \quad \times 3 \quad \div 2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$= \frac{5}{7}\text{g} \quad \times 3 \quad /2$$

$$= \frac{5}{7}\text{g} \quad \times \frac{3}{2}$$

$\frac{2}{3}$の**逆数**

$\frac{3}{2}$**を掛ける**。

C案

$\dfrac{5}{7}$g　÷2　×3……………①

$=\dfrac{5}{7}$g　÷（2÷3）　……………②

$=\dfrac{5}{7}$g　÷　（2 /3）

$=\dfrac{5}{7}$g $\boxed{\div\dfrac{2}{3}}$

$\boxed{\dfrac{2}{3}\div\dfrac{2}{3}=1}$だから、

$\dfrac{5}{7}$g $\boxed{\div\dfrac{2}{3}}$

B式もC式も

A式の変形に過ぎない。

ソ−3　比の言い方

次は、いささか判りにくい話です。

> ２dL と３dL の割合を
> 「2：3」と表し
> 「二対三」と読みます。
> この様に表したものを
> 「比」と言います。

これが一般の導入の例ですが、
判っている者にだけ判るって感じです。

皆さんは、
比を学んでいますから、
『なるほどね』
と理解できるでしょう。

また一般に、次のようにも言いますが、
注意深くないと、
よく判らないところです。

Ａ	２の３に対する割合を、 ２：３と表します。

Ａ	２の、３に対する割合を、 ２：３と表します。

2のの後ろに、、を入れると、
少しわかりやすくなるかもしれません。

同じことを、

Ｂ	３に対する２の割合を、 ２：３と表します。

とも言います。

ＡもＢも、
日本語としては判りにくい表現です。
何故なら、

基本になるものを
後ろに置いているからです。
数学は西洋語中心ですから、
仕方がないのでしょう.

注意深く読むようにしてください。

ソ−4

内項の積 ＝ 外項の積

中学でよく使う式です。

１：２＝５：10

内項の積＝２×５＝10

外項の積＝１×10＝10

内項の積と外項の積が一致しました。

しかしこれでは、

何故等しくなるのかが

よくわかりません。

次の例を見てください。

１：２＝５：５×２　　ですね。

内項の積＝　２×５

外項の積＝１×５×２

等しい理由が感じられます。

1：n＝a：a×n　ならば、

内項の積＝a×n

外項の積＝1×a×n

少しわかりやすくなりましたか、

それともわかりにくく？

少し飛ばしましょう。

	m	：	1	：	n
＝			a		

とすると、

	m	：	1	：	n
＝	a×m	：	a	：	a×n

それゆえ、

m：n＝a×m　：　a×n

だから、

内項の積

$$=\boxed{n}\times\boxed{a\times m}=a\times m\times n$$

外項の積

$$=\boxed{m}\times\boxed{a\times n}=a\times m\times n$$

これが分かるか分からないかの境目は、

最後の一般式ではなく、
具体数での自分での計算結果です。

幾つの例を見れば納得できるかは、
人によって違います。
１つで判った、という早とちりの人、
たくさんの類例を見ないと、
安心できない慎重な人、色々です。

ｍ：ｎ＝Ａ：Ｂ

と表している限り、
$\boxed{\textbf{内項の積＝外項の積}}$の理由は
見つかりません。

『内項の積＝外項の積だから、
ｎ×Ａ＝ｍ×Ｂ』
と宣言されても説明不足ですね。

次のように表せば、

一致することが見えます。

$\boxed{m} : \boxed{n} = \boxed{A} : \boxed{A \div m \times n}$

と表せば、

内項の積＝n×A＝A×n

外項の積＝m×A÷m×n＝A×n

として一致します。

分かってしまえばカンタンなことなのに、

なんだか分からないままに使っている人は

かなり多いと思われます。

いきなりの文字式では納得できませんね。

みなさんは数字で確認が必要です。

類題の出番です。

1：3＝5：5×3

1：4＝5：5×4

1：6＝5：5×6

数学は、幾つもの具体数

で考えることが必要です。

すぐには『判る』と言わない人は、

慎重なのです。

算数に向いていないわけでは

ありません。

自信をもって、幾つもの具体例を見ていきましょう。

これをプリントして 自分である部分を隠して 言えるように練習できれば 今後の数学学習も悠々とできるでしょう。 このファイルが小学時代の仕上げです。 数学は自問自答が大切です。