

ソ-5

正比例

時間はかなりかかるでしょうが、
次の正比例の定義を暗誦しなさい。

正比例の定義

伴って変わる2つの量

x と y があって、

x の値が、

2倍、3倍、……………

となると、

y の値も、

2倍、3倍、……………

となる時、

y の値は、

x に比例する

と言う。

これが、

G-c 比例・反比例

6年生で学ぶ正比例の**定義**です。

x と **y** は目新しいのですが、
内容は珍しくありませんね。

鉛筆の**本数**が2倍になった時、
鉛筆の**代金**が2倍になることは、
小学2年生でも知っている話です。

一定の速さで動く乗り物の
時間が2倍になれば
動く**距離**も2倍になります。

高さが一定の長方形の
ヨコの長さが2倍になれば
面積も2倍になります。

G-c 比例・反比例

一般的に、

「物を数える時に、

個数が2倍、3倍、…………となると、

重さが2倍、3倍、…………となることは、誰もが知っていることですね。

同じ形・同じ大きさ・等質の物

を作れるようになった社会になって、

それを数えて数が発達しています。

「正比例の感覚」は、

同じ形・同じ大きさ・等質の物体

を数える時に既にできているのですね。

自然数も、

確かに $1+1$ は2なのだが、

基本に置くべきは、足し算でなく、

1倍、2倍、3倍などの考えなのです。

G-c 比例・反比例

「なぜ、
足し算より先に掛け算を計算するのか。」
もこれで説明できます！

数の基本を『足し算』で定義しては、
『掛け算を、足し算より先に計算すること』
は説明できません。

世の中に、
足し算より掛け算を先に計算することの
理由が存在しないのは、
『1を基本に置き、
その足し算で自然数を定義する』からです。

$4 + 3 \times 2$ が 14 でなく、10なのは、
 $4+6$ が 10 だからです。

3×2 とは、6 のことなのです。

つまり、
掛け算 3×2 は、数 6 の内部の問題なのです。

自然数が、

1 と

素数と合成数に分類されるのは、
『(掛け算で出来ない数) 素数と
(掛け算で出来る数) 合成数に
分類されるから』
と考えると説明できます。

素数は今、

『割ることのできる数が
1 と その数 の 2 個だけ』 と
定義されています。しかし、
元々は、

「掛け算で出来ない数が素数」
と考える方が自然です。

「掛け算で出来るか出来ないか」
が分類の元でしょう。

正比例の話としてはちょっと脱線気味です。元へ。

正比例の感覚、すなわち、

ともな
伴って変わる
2つの量があって、
一方の値が、
2倍、3倍、…………となると、
もう一方の値も、
2倍、3倍、…………となる時、
2つの量は比例する
と言う

は、個数を数える時に既に出来ている、
と考えることが大切であり、
その感覚を創るためには、
同じ形・同じ大きさ・等質の物
を数えることが必須です。

異なる形・異なる大きさの物
を数えていては、
等倍概念はできません。

G-c 比例・反比例

○×△を一二三と数えていては、
等倍感覚はできないので、
幼児に個数を数えさせるときは、
同じ形・同じ大きさ・等質の物
を用意することが必要です。

幼児期に等倍概念ができれば、
6年生の正比例は、
ほとんど、用語だけの問題です。
2年生のかけ算、3年生のわり算も、
個数が、倍数であることを知らなければ、
それはそれは難問になります。

正比例の学習で、
君たちが知らなかったのは
正比例

という用語だけです。

少し付け加えると、
正比例を考える時、
正比例だけを考えていても、
正比例の特徴がよく判る
というものではありません。

犬の特徴を知らせようと思えば、
少なくともネコくらいは同時に見せるべきです。

よつあし
四足動物を見たことのない幼児に、
イヌだけを見せて、イヌ・イヌと教えれば、
たぶん、牛を見れば、『大きいイヌ』と言うと思います。

三角形をよく知ろうと思えば、
四角形や五角形を見るべきです。
さらに、
円を見ることも大切です。

「一方が増えるともう一方も増えるとき」
『正比例』と考える子も結構います。

両方が増えるだけでは
正比例とは言わないことも
同時に知らねばなりません。

一方が2倍になれば
もう一方も2倍に増える時だけ
正比例と言う

のです。

「一方が2増えれば、
もう一方も2増えるような
二人の年齢の関係は
正比例とは言わない」のです。

G-c 比例・反比例

また、

「24円を分配するときの、

分配する人数と一人分の金額」のように、

一方が**2倍**になれば
もう一方は**2分の1**になるとき
2つの量は**反比例**と言う

などの例についても考えておいてください。

G-c 比例・反比例

本では、

疑問が湧いたとき、どこにその答えがあるか探すのが
かなり大変です。

人間の先生の特長は、

生徒の様子を見ながら、その疑問に答えることができる、
ということです。

ですから、

本で学ぶことも大切ですが、
先生に尋ねることも大切です。

先生に尋ねることのできない子は、
伸びそこなうので注意しましょう。

人間の先生は、君の力をはかりながら、
時に応じて関係する事柄を
ついでに触れてくださることでしょう。

正比例

1本5円ならば、2本、3本、 n 本では？

これを表に表すと

本数	1	2	3	...	n
求める式	5円	5円 \times 2	5円 \times 3		5円 \times n
金額	5円	10円	15円		円

n 本のところが少し説明が必要ですが、

あとは単純な小学2年生の問題です。

この表の本数を、

どんな数をいれても良い**変化する数**の代表として x 本、

その結果の金額を y 円と表すと

本数	1	...	n	...	x 本
求める式	5円		5円 \times n		5円 \times x
金額	5円		5 n 円		y 円

G-c 比例・反比例

$$y = 5 \times x$$

となり、 y は x に比例します。

これを**正比例**と言います。

この様に、**順に考えた結果**を x や y で表す、と約束すると

算数は断然わかりやすくなります。

x や y を先に表す

x 本	1	2	3	...	x
y 円	5	10	15		y

のような表は、かなり判りにくいものです。

結論を先に示し、その意味を後で説明する英語的表現は
英語人なら知らず、

日本語人にはいささか判りにくいところです。

知っていることを重ねて、順に階段を上る学習法が
解りやすい考え方だと思います。

この学習において、

小学2年生が「分からない」

と言うところは何でしょうか。ほとんど無いのです。

まあ、x や y が「？」でしょうが、

「□や△の代わり」と言えば、当たらずとも遠からず、にい
けます。

ソ-6

反比例

反比例を学ぶのに適した時期は、
小学6年生でしょうか。

例えば、反比例と呼ばれる次の問題。

24本の鉛筆を分けます。

1人でもらえば24本。

2人で分ければ、1人は12本。

3人で分ければ、1人は8本。

4人で分ければ、1人は6本。

8人で分ければ、1人は3本。

分ける人数が2倍になれば、

1人当たり2分の1。

分ける人数が3倍になれば、

1人当たり3分の1。

このようなことを学ぶのに、
小学6年生まで待つべきでしょうか。

G-c 比例・反比例

みなさんは、

3年生の時に出来たと思うことでしょう。

24個の同じ大きさの正方形があります。

この正方形を長方形の形に並べます。

タテに1個ならば、ヨコは24個。

タテに2個ならば、ヨコは12個。

タテに3個ならば、ヨコは8個。

タテに4個ならば、ヨコは6個。

タテに6個ならば、ヨコは4個。

.....

タテの個数が**2倍**になれば、

ヨコの個数は**2分の1**。

タテの個数が**3倍**になれば、

ヨコの個数は**3分の1**。

.....

面積が、 24 cm^2 の長方形があります。

タテの長さが 1 cm ならば、ヨコは 24 cm 。

タテの長さが 2 cm ならば、ヨコは 12 cm 。

タテの長さが 3 cm ならば、ヨコは 8 cm 。

タテの長さが 4 cm ならば、ヨコは 6 cm 。

タテの長さが 6 cm ならば、ヨコは 4 cm 。

タテの長さ 2 倍になれば、

ヨコの長さは $\frac{1}{2}$ 。

タテの長さが 3 倍になれば、

ヨコの長さは $\frac{1}{3}$ 。

と、面積が入れば、四年領域を学んでから。

24k_ℓを進むのに、

1時間に1k_ℓの速さならば、24時間

1時間に2k_ℓの速さならば、12時間

1時間に3k_ℓの速さならば、8時間

1時間に4k_ℓの速さならば、6時間

1時間に6k_ℓの速さならば、4時間が

掛ります。

速さが2倍になれば、時間は2分の1、

速さが3倍になれば、時間は3分の1。

を考えるのは、速さを学んでから。

しかし、

簡単な数字ならば、

三年生でも十分に理解できます。

反比例の実例は、

6年生を待つ必要はありませんね。

さて、

G-c 比例・反比例

人類は、

正比例と反比例の概念の

どちらを先に獲得したのでしょうか。

わり算は、

かけ算の逆のように考えていますから、

掛け算の後で割り算ができたように

思われがちです。

しかし、

食べ物を見つけた後、

仲間に分け合うのが先か、

食べ物を生産するとき、

仲間が増えて何倍になるか考えるのが先か。

どうでしょう。

割り算が先のように思われませんか。

G-c 比例・反比例

無いところに足していく足し算と、
有るところから引いていく引き算と
どちらが先に獲得した考え方でしょうか。

人類は、(猿類も)

引くことを

足すことより先に行っていたのは
確かだと思います。

まあ、そのようなわけで、
今ある数学は、
人類の初めからそうだったのでなく、
どこかで順序が変わった、
と考えるべきだ、と思うのです。

それゆえ、

きみたちも、算数を考える時、

今の数学の本の^{ほん}順が望ましい順序だ、
とは考えない方が良くはないか、と言う提案です。

G-c 比例・反比例

ノーベル賞をもらった方が

『ほんとかどうか、自分で見るまでは信用するな』
と言っておられますから。

反比例と**逆比**

一方が2倍になると、
もう一方が2分の1となるとき、
二つは**反比例する**という。

上のことを式に表せば、

一方が $\times 2$ となると、
もう一方が $\div 2$ となるとき、
二つは**反比例する**という。

一方が3倍になると、
もう一方が3分の1となるとき、
二つは**反比例する**という。

上のことを式に表せば、

一方が $\times 3$ となると、
もう一方が $\div 3$ となるとき、
二つは**反比例する**という。

G-c 比例・反比例

一方が n 倍になると、
もう一方が n 分の 1 と 140
なるとき、
二つは反比例するという。

上のことを式に表せば、

一方が $\times n$ となると、
もう一方が $\div n$ となるとき、
二つは反比例するという。

G-c 比例・反比例

一方の量が A で、
もう一方の量が B、とすると、
A が 2 倍になると、B は 2 分の 1.

これは $A \times 2$ となると、B は $B \div 2$
と示すことができます。

$$(A \times 2) \times (B \div 2) = A \times B \quad \text{です。}$$

同じように、

$$(A \times 3) \times (B \div 3) = A \times B \quad \text{です。}$$

$$(A \times n) \times (B \div n) = A \times B \quad \text{です。}$$

反比例する二つの数の積は
元の数 2 つの積と同じで
常に一定です。

これを使って、少し発展させると、

G-c 比例・反比例

一方が $\frac{2}{3}$ 倍、 $\frac{3}{4}$ 倍、 $\frac{p}{m}$ 倍……になると、

もう一方が、

$\frac{3}{2}$ 倍、 $\frac{4}{3}$ 倍、 $\frac{m}{p}$ 倍……になる時、

二つは反比例するという。

ことがわかります。

G-c 比例・反比例

1 : 2 は、 $\times 2$ です。

2 : 1 は、 $\div 2$ です。

1 : 2 と 2 : 1 は、**逆**の関係です。

1 : 3 は、 $\times 3$ です。

3 : 1 は、 $\div 3$ です。

1 : 3 と 3 : 1 は、**逆**の関係です。

2 : 3 は、 $\div 2 \times 3 = \times 3 \div 2$ です。

3 : 2 は、 $\div 3 \times 2$ です。

逆の関係であることが判ります。

つまり、

$2 : 3$ と $3 : 2$ の関係、

$3 : 4$ と $4 : 3$ の関係、

$m : p$ と $p : m$ の関係は、

逆の関係です。

これを、

逆比、といいます。

反比例

ネーミングの問題ですが、
反比例という言葉の響きは、
余り良くありません。

負の数も問題です。
正の数・正比例にくらべて、
良くないイメージがあるからです。

他にこれが良い、
と言う案も無いのですが、
みなさんには、
良くないイメージを持つ必要は無い、
と強調しておきたいのです。

G-c 比例・反比例

タテが2倍になって、
ヨコが2分の1になるのは、
別に、
2倍になった方が正常で
2分の1になった方が卑下する必要は
ありません。

価値観を秘めている用語は、
数学には向きません。