比例

比例は、過去には、
６年生で扱われていました。

2018 年現在、
５年生の単元になりました。

そして、今まで通り、

２つの量が有り、 **Ａの値が２倍、３倍、………になると** **それにともなって、** **Ｂの値も、** **２倍、３倍、………になるとき、** **Ｂは** **Ａに比例する、と言います。**

と導入されています。

まことに尤もなことで、

何の疑いも無いように思われます。

しかし、このことは、この学年で、

初めて学ぶべきことでしょうか。

１本５円のエンピツが、 ２本で何円か。

の問題は、

5×2＝10　よって 10 円

と答えることになっていますが、

何故、×2 なのか。

「1 本が５円のエンピツ、

　２本ならば５円の２倍でしょう」

と繰り返しても、

答えにならないことは

同意頂けるでしょうか。

当たり前すぎて説明できない感じですね。

しかし、これは説明が必要です。

１本	⇒本数が２倍だから	２本
５円	⇒値段も２倍になる	５円×２

これでかなり判り易くなりましたね。

つまり、

個数が２倍だから 値段も２倍になる

というわけです。

であるのに、

何故、小学二年生では

そのように説明しないのでしょうか。

それは、今まで、比を

６年生で教えることになっていたからです。

６年で教える概念を

２年の問題に使うわけにはいきませんね。

３本でいくら？本数が３倍なら値段も３倍。

４本でいくら？本数が４倍なら値段も４倍と、

比が繰り返し使われて

「比例」になります。

いずれは、

「二乗に比例する」、

などと使われるようになるので、

「正比例」にした方が良いと思いますが、

何故か「比例」です。

では何故、正比例は、

５年になってからなのでしょうか。

理由が無いわけではなさそうです。

例えば、

２年生では、

個数の場合だけですが、

５年生ならば、

長さなどの連続したものも扱えます。

また、

ｘとｙの関係を、

ｙはｘの何倍かにおいて、

小数や分数の場合も扱えます。

そんなこんなで、

後回しになったのかも知れません。

が、それはそれとして、

低学年から「比」を使うべきだ、

と考えます。

このシリーズの眼目です。

割合

5年生の単元の中で、
最も問題なのが「割合」です。

私は、小学校に勤めるまで、
「比べる量÷割合＝元にする量」
という式を使ったことがありません。
小学校でどうしていたかの記憶は
有りませんが、
以後、この様に意識したことがありません。

比を使っていました。

皆さんは如何ですか。

利益が60円で、原価の3割です。 原価はいくらですか。

この問題を

どう考えて答えられますか。

ふつう、

「60円が３割ならば、　１割は20円。

　原価10割は、20円の10倍」

ではないでしょうか。

これは、倍関係です。

①②③は考える順序を示しています。

60円	②　20円	④　20円×10
3割	①　1割	③　10割

こういう感じではないでしょうか。

誰も、学校で習ったように、

3割は小数で表すと0.3　。
元にする量＝比べる量÷割合　だから、
60円÷0.3＝200円

とはしないと思います。

学校でだけやる計算です。

しかも、

$\boxed{\text{元にする量＝比べる量÷割合}}$なる式を

子どもたちに十分には

教えることが出来ていません。

大部分の子どもたちが

「よくわからない」と言う式です。

$\boxed{\text{60 円÷0.3＝200 円}}$

この指導には、さらに

いくつかの難点があります。

例えば、

原価が 10 割であることは、

別のところで勉強して知っていなさい、

という条件がついています。

「3 割は、10 等分したうちの 3 つ分」

ですから、

「10割は、÷3×10」と理解できるのに、

「÷0.3」とするメリットが判りません。

「÷0.3」も結局は

「÷3×10」或いは「×10÷3」であることを説明しなければ

ならないのに、

その説明がありません。

子どもたちが「わからない」と言うのも

無理はありません。

同じことは、

200円の3割が利益です。 利益は何円ですか。

にも言えます。

これを学校では、(指導要領は、)

３割は、小数で表すと0.3　。
元にする量×割合＝比べる量　だから、
200円×0.3＝60円

とします。

次のように考えさせるのはどうでしょうか。

３割は、10等分した内の３つ分ですから、
÷10×3　と表せます。
「200円　÷10　×3　＝　60円です。

これで十分なはずです。

子どもたちの理解も完璧です。

百歩譲って、

200円×0.3　とするにしても、

先に、

整数計算で理解した後に

「小数でも表せる」、

とする方が良いと思います。

判ったことの別形式表現は、
比較的理解されやすいからです。

さて、
いつの頃からか、
歩合が教科書から消えて
百分率だけになりました。

学習内容の精選、でしょう。
その為、いきなり、
百等分を扱うことになりました。
計算の苦手な子には少し負担です。

歩合の問題と、
全く同じようなことですが、
百分率でも繰り返しておきます。

利益が60円で、原価の3%です。 原価はいくらですか。

この問題を

どう考えて答えられますか。

ふつう、

60円が3%ならば、　１%は20円。 原価100%は、20円の100倍

ではないでしょうか。

これは、倍関係です。

60円	②　20円	④　20円×100
3%	①　1%	③　100%

こういう感じではないでしょうか。

誰も、学校で習ったように、

3％は小数で表すと 0.03　。 元にする量＝比べる量÷割合　だから、 60 円÷0.03＝2000 円

とはしないと思います。

学校でだけやる計算です。

しかも、

元にする量＝比べる量÷割合なる式を

子どもたちに十分には

教えることが出来ていません。

大部分の子どもたちが

「よくわからない」と言う式です。

利益が60円で、原価の3%です。 　原価はいくらですか。

この問題の指導には
いくつかの難点があります。

例えば、
原価が100%であることは、
別のところで勉強して知っていなさい、
という条件がついています。

「3%は、100等分したうちの３つ分」
ですから、
「100%は、÷3×100」ならば
理解できるのに、
「÷0.03」とするメリットが判りません。

「÷0.03」も結局は
「÷3×100」或いは「×100÷3」

であることを説明しなければならないのに、
その説明がありません。

子どもたちが「わからない」と言うのも
無理はありません。

同じことは、

2000円の3%が利益です。 利益は何円ですか。

にも言えます。

これを学校では、（指導要領は、）

3%は小数で表すと0.03　。 元にする量×割合＝比べる量　だから、 2000円×0.03＝60円

とします。

3%は、 100等分した内の３つ分ですから、 ÷100×3　と表せます. 2000円　÷100　×3　＝　60円です。

これで十分なはずです。

子どもたちの理解も完璧です。

百歩譲って、

2000円×0.03　とするにしても、

先に、

整数計算で理解した後に

「小数でも表せる」、

とする方が良いと思います。

60円は、2000円の何%ですか

この問題はどう考えましょうか。

学校での正解は、

60円÷2000円＝0.03 よって3%

子どもたちは、あちこちでつまずきます。

算数の問題は、

簡潔に表現しようとして、

色々なものが略されます。

この問題は、

少し説明を加えた問題にすると、

2000円を100%とみると 60円は何%ですか

表で考えると、

2000円	②　20円	③　60円
100%	①　1%	④　3%

とかんたんです。

何故かんたんなのか。

それは、整数計算だからです。

2000円が100%ならば、

1%は、2000円÷100＝20円

60円は20円の3倍だから、3%。

ごく明瞭です。

3%＝0.03

であることは、

どのように説明するとよいでしょうか。

100%を 1 とすると、

1%を 0.01、

3%は 1%の 3 倍だから 0.03。

表にすると

100%	1%	3%
1	0.01	0.03

簡単そうですが、

100%が 1

と言うところに難所があります。

何故難所になるかと言えば、

順序が逆だからです。

100%が 1

からスタートすると判らないのです。

$\boxed{\text{1を100%とあらわすことにする}}$、

というところから始めるべきなのです。

算数は、こういう逆転現象だらけです。

「割合」は「5年生の単元」ですが、

本当にそうあるべきでしょうか。

「割合」は、言い換えれば、

「何倍か」と言うことです。

「割合が0.03」と言うのは、「0.03倍」のことです。

割合を小数で表すあたりから

「割合」と言い始めるのですが、

「6は2の3倍」の「3倍」も

「割合」と呼ぶべきです。

そうすれば、

0.3倍の割合へも自然に導かれます。

6÷2＝3　は、

「6は2の3倍」

これを表にあらわせば、

6	2
3倍	ここは何でしょうか

算数は、

三つの数の関係にするのが好きです。

しかし、

このことにより、

子どもにとって難しく、かつ

説明しにくくなっています。

算数は、

四つの数の関係を簡略に

三つの数の関数関係にするのが

好きなのです。それゆえ、

説明しにくくなっているのです。

6÷2＝3　の真意は、

6	2
÷2	÷2
3	1

６と２を較べるのに、 ２を１と考えると ６は３に当たる

です。

その全体を表現すると、

２を２で割って１、 ６も２で割って３

しかし、

２を２で割る部分は、必要ないだろう
として省略されるのです。

つまり、
比ならば表現されるものが
関数関係では省略されるのです。

比を

6年生の単元としたところに

困ったことが起こっているのです。

6÷20＝0.3　の真意は、

6	20
÷20	÷20
0.3	1

6÷2＝3のときに、

2を1と見る習慣をつければ、

6÷20＝0.3　も

20を1と見ることは

そう困難なことではありません。

6÷2＝3　のときに、

2を1と見ることをせずに、

6÷20＝0.3　のときに、

いきなり、

20を１と見よ、

というのは乱暴です。

常に準備が大切です。

算数は、一貫性を大切にします。

子どもたちも

算数には一貫性を求めています。

だから、子どもたちが

「算数が判らない」と言うときは、

「前の説明とつながらない」、

と言っていると聞くべきです。

天から降ったか地から湧いたか

いきなり、

「20を１と見ると」

等と言い出せば、

「何？それ！」となるのです。

算数の教科書も、

天下り的な宣言が多すぎます。

もう少し、

子どもの心に添った表現にしてほしい

と思います。

次は、教科書等の比の説明です。

２㎗と３㎗の割合を **２：３と表し** **２対３と読みます。** **この様に表したものを** **比と言います。**

これでは、

判っている者にだけ判る

って感じです。

このテキストの６年生または２年生の

「比」を参照してください。

どうすれば判りやすくなるか

割合

広く言うと、

割合とは、

何倍か、の言い換えです。

倍とは、**狭く言うと、**

日常語では２倍のことです。

しかし、

数学ではもっと広く解されます。

倍の概念が生まれると、逆向きの

分(ぶん)の概念が生まれます。

分の概念とは、

分数概念ではなく、

先ずは、

２等分、３等分など

整数計算に有る概念です。

$\boxed{1}$の**3倍**が$\boxed{3}$です。

逆に、

$\boxed{3}$を**3分**して$\boxed{1}$です。

倍の逆向きが分です。

分の逆向きが倍です。

数学的には、

分もふくめて、

倍と言うようになりました。

10分の1を、

0.1と表し、

20÷10を

20×0.1と表し、

20の0.1倍

などに表れています。

引くことを、

$\boxed{\text{マイナスを足す}}$

と言うようなものです。

言葉は、

次第に適用範囲を広げることがあります。

逆に、

適用範囲を狭めることも有ります。

次々に言い換えが起こるので、

子どもたちは大変です、

子どもに教えるのに、
小数が先か、分数が先か
と言う論争があります。

10等分の概念を、
単に÷10と捉えれば、
10進法で
小数を先に教えることが
できそうです。

しかし、
200円の10分の3
等と言うとき
これを小数で言い表すと
どうなるのでしょうか。

10分の3は整数計算で、
分数ではない、
と言うのでしょうか。

分数に導くときは、

200円　÷10　×3

と整数で表し、

次に、

掛けることと割ることは

順序を入れ替えることが出来るので、

200円　×3　÷10

÷10を英語風に表すと、

200円　×3　/10

これを、

算数では、

200円　$\times\frac{3}{10}$　　と表します

と言えば、

子どももすぐに納得してくれます。

この「10 分の 3」を

「0.3 とも表す」ので、

と導けば、問題は起こりません。

このように、

200 円　$\times\frac{3}{10}$　の方から始め

200 円　×0.3　に進む方が、

逆より説明しやすいと思うのです。

小数が発明されたのは 400 年前ですが、

分数は、古代エジプトにあります。

5000 年前です。

分数で、あのピラミッドができたのです。

分数を先にする方が良いと思います。

数学は、略式が多い。

算数の問題は、
洗練された考え方を教えようとします。

また、
古代ギリシアの影響で、
結論を先に言い、
そこに至る筋道を後で説明しよう
とします。

しかし、
この方法を学習の初めに持ってくるのは
子どもに向きません。
いやたぶん、大人にも向きません。

事実をよく知らない子どもたちは、
類例を重ねて、
自分で法則を見つけて納得すると
自信をもって使えるようになります。

論理は、

子どもたちにとって胡散臭いものなのです。

世の論理は、しばしば、

反例を見逃しているからでしょうか。

指導の望ましい順序ではありませんが、

とりあえず、

五年生の割合の問題にぶつかった時の

説明方法を考えてみます。

300 円の 7％は何円か。

ふつう、

300 円×0.07

と立式しなさい、とされる問題です。

この問題は、**省略**された表現です。

300 円が 100％であること

が示されていません。

算数は、

「考えさせること」を

重視しているように見えます。

問題を与え、

答えを求める時に考えさせる

というわけです。

しかし、多くの場合、
算数の約束事を知らないと
考えることのできない場合が
非常に多いのです。
この場合もそうです。
約束ごとは、
考えるべきことではなく、
知らせるべきことです。

これを、次のように言い表せば
かなりカンタンになります。

300円を100%とすれば、
7%は何円か。

これを、

100%	7%
300円	?

とすれば、かなり見えてきます。

さらに、

100％	1％	7％
300 円		？

とすれば、小数不要の問題になります。

この表のような表現は、

２年生のかけ算の問題に始まります。

少し例を示します。

１個	２個
３円	？

１個３円の物、２個では何円か。

ふつう、(3×2＝6　　６円)

「3円×2＝6円」と答えさせます。

何故、×2 なのかの説明は

求められません。

個数が２倍だから、

値段も２倍になる、という論理です。

しかし、

その確認はふつう行われません。

何故なら、

個数と値段がともに２倍になる、

とする考え方は、

６年で教える「正比例」の考え方

を含んでいるからでしょう。

しかし、

正比例の感覚は、

個数を数える時に、

既に手に入れているはずです。

７個	１個
21 円	？

７個 21 円の物、１個では何円か。

ふつう、(21÷7＝3　３円)

「21 円÷7＝３円」と答えさせます。

何故、÷7 なのかの説明は

求められません。

個数が７分の１だから、

値段も７分の１になる、という論理です。

しかし、

その確認はふつう行われません。

何故なら、

個数と値段がともに７分の１になる、

とする考え方は、

６年で教える

「正比例」の考え方を含んでいるからです。

しかし、

正比例の感覚は、

個数を数える時に、

既に手に入れているはずです。

この問題を複合させます。

７個	**２個**
21円	**？**

このままでは、

大変難しそうな問題になりますが、

これを、

７個	１個	２個
21円		？

とすれば、

小学三年生の出来る問題になります。

しかし、明らかに

正比例の感覚が無ければできません。

つまり、

「正比例」は教えていないけれど、

正比例の感覚を使いなさい

ということです。

いや、

それに気づいているのではなさそうです。

300円の7%は何円か

の問題を解くのに、

7%は0.07だから、

300円×0.07とさせるのは、

小学校だけの問題です。

世の中では、使われていません。

これは、

300円　÷100　×7

としているはずです。

×0.07困っている子どもも

大勢いるのですから、

÷100　×7

としては如何でしょうか。

これなら、ほぼ全員、

さほどの時間もなく理解されます。

理解できなければ、

三年生の問題に困るはずです。

÷100×7 を

×0.01×7＝×0.07

と表すことを知らせるべきです。

ついでに言うと、

歩合（何割何分）を、

教えることを減らす、と言う考えで

なくしてしまったので、

10分の1、

÷10＝×0.1

から始める道を失いました。

しかし、

文部省の指導要領は、

「最低限を示すもの」

との考えを示すようになりましたから、

「何分」を扱うかどうかはともかく、

「10分の１のことを１割と言う」ことは、

世の常識としても扱うべきことと

思います。いきなり、

100分の１の1％から始めるのは、

指導法としてまずいと思います。

子どもたちは、

自分でかんたんに計算出来る問題で、
確かめながら納得していくからです。

こどもたちは、

易しい数字の問題を繰り返して、

考え方を身につけていく、

と考えるべきです。

自分でも類例を考え出せるようにするのが

指導の目標でもあります。

30円の7割は何円か。

ふつう、

30円×0.7

と立式させていた問題です。

この問題は、省略された表現です。

30円が10割であること

が示されていません。

算数は、

「考えさせること」を

重視しているように見えます。

問題を与え、

答えを求める時に考えさせる

というわけです。

しかし、多くの場合、

算数の約束事を知らないと

考えることのできない場合が

非常に多いのです。

この場合もそうです。

約束ごとは、考えるべきことではなく、

知らせるべきことです。

そして、省略表現についても。

これを、次のように言い表せば

かなりカンタンになります。

30円を10割とすれば、7割は何円か。

これを、

10割	7割
30円	?

とすれば、かなり見えてきます。

さらに、

10割	1割	7割
30円	3円	21円

とすれば、小数不要の問題になります。

これを練習しておけば、
百分率の問題は、類題として扱えます。

ついでに、
千分率（パーミル）（海水の濃さ34‰）、
百万分率（ｐｐｍ）
も扱っておきましょうか。

ついでですが、
百万分の１は、大変小さい数に見えます。
空気中の有害物質の量など、
「百万分の20」と言われても、
「まあ問題ではないだろう」
と思うわけです。
しかし、次のように説明すると、
かなり深刻なことが判ります。

「1立方メートルは、

100 ㎝×100 ㎝×100 ㎝ですから、

100 万立方センチメートルです。

この１㎥の水の中に、

糞尿が20 ㎤入っている、

と想像してみてください。

飲めますか。」

『無理ムリ』の返事は確実です。

百万分の１も、こう考えると、

かなり大きな数です。

7%が21円ならば、 **元の金額は何円ですか。**

これは、ふつう、

次のような立式で答えるよう

求められています。

21円÷0.07＝300円

これは、

比べられる量÷割合 ＝元にする量

の例ですが、

これには、

習う子どもたちも、教える先生方も

大変困っています。

困る理由は、

問題文も略語ですし、さらに、

最後に到達した略式を

原理のように理解しよう

としているからです。

いつもの通り、

歩合の整数計算から考えてみましょう。

ア

１割が２円ならば
３割は何円か。

次のような表にすると、二年生の問題です。
３割は１割の３倍だから、とカンタンです。

１割	３割
２円	６円

もちろん、
３割は１割の３倍であることの学習
が済んでからですが。

イ

３割が６円ならば
１割は何円か。

次のような表にすると、三年生の問題です。
１割は３割の３分の１だから、と簡単です。

３割	１割
６円	２円

ウ

３割が６円ならば
10 割は何円か。

次のような表ではちょっと抵抗があります。

３割	10 割
６円	20 円

次のように、１割をはさみます。

エ

３割	１割	10 割
６円	２円	20 円

こうすれば、イとアの複合、
３年生と２年生の問題の単なる複合です。

エの様な指導の後で、
ウの問題に取り組めば、
さほど抵抗はありません。

6円÷0.3＝20円は、

それから後の立式です。

いきなりでは　？　です。

6÷0.3は、

6÷3×10と一致する説明が必要です。

6÷3×10が

6÷0.3　と表すことが出来るとする順序が判る道筋になる子どもも多い。

6÷3＝60÷30のように、

割られる数とわる数を両方10倍しても

割られる数がわる数の２倍であることは

変わらないように、

また、

6　÷3　×2＝6　×2　÷3のように、

掛けることと、割ることの順序は

入れ替えられるから、

$6 \div 0.3$

$= (6 \times 10) \div (0.3 \times 10)$

$= 6 \times 10 \div 3$

$= 6 \div 3 \times 10$

10割を1とすると、

1割は0.1

3割は0.3

と表せることの説明の後、

次の関係を掴む。

3割	÷3	1割	×10	10割
0.3	÷3	0.1	×10	1
6円	÷3	2円	×10	20円

そして、左が右のようになるためには

0.3	÷3×10	1
6 円	÷3×10	20 円

0.3 が 1 となるためには 0.3 で割る、

というのも説得力がある子もいます。

0.3	⇒　÷0.3	1
6 円	⇒　÷0.3	20 円

いずれにしても。

比例関係をつかんでいることが必要です。

それは、

二年生のかけ算の問題から必要です。

30円は10円の何倍か。

30÷10＝3

３倍である。

これは、実は略式である、

と考えることが、必要です。

10円の３倍は30円です。

この３倍の３という数は、

何かを１としているはずです。

つまり、

10円を１とすると、

30円は３に当たる

です。

表にすると

10円	30円
1	3

または、

30円	10円
3	1

	30円		10円	
÷）	10円	＝	10円	（÷
	3		1	

30円は10円の何倍か、は
10円を1とすると、
30円は3に当たる

を略式化して、

30円は10円の何倍か。
30÷10＝3
3倍である。

のように、関数関係化したものです。

関数関係を理解し、表現するのは、
算数学習の目標ですが、
比の関係を飛ばして
いきなり関数化する学習方法は、
算数を覚える学習にしてしまう恐れ
があります。

先ずは、比の関係を掴ませるべきです。

同様に、

6円は20円の何倍か。 6÷20＝0.3 0.3倍である。

このことも、今見たように、

20円の0.3倍は6円です。

この 0.3 倍の 0.3 という数は、

何かを１としているはずです。

つまり、

20 円を１とすると、 ６円は 0.3 に当たる

です。

表にすると

20 円	６円
1	0.3

または、

６円	20 円
0.3	1

	6円		20円	
÷）	20円	＝	20円	（÷
	0.3		1	

6円は20円の何倍か、は
20円を1とすると、
6円は0.3に当たる

を略式化して、

6円は20円の何倍か。

6÷20＝0.3

0.3倍である。

のように、関数関係化したものです。

10等分したうちの１つ分を１割という。

10等分したうちの１つ分を0.1と表す。

同様に、

10等分したうちの３つ分を３割という。

10等分したうちの３つ分を0.3と表す。

これを複合して、

６円は20円の何割に当たるか

という問題に答えられるようになる。

同じように、

6円は200円の何%に当たるか

の問題は、

100分の1のことを1%と表し、

100分の1を0.01と表すことから、

6円		200円
÷）200円	＝	200円（÷
0.03		1

200円を1とすると、

6円は0.03に当たる。

$$0.03 = \frac{3}{100}$$

＝3/100＝3パー100

＝3パー百

＝3パーセント＝3%

6 円は 200 円の 0.03 倍、即ち

6 円は 300 円の 3%