分数をかける

「分数をかける」とは

どういう意味か。

数学は出来上がった形から

説明しようとする。

だから、

分数がどのようにして出来てきたか

を問題にせず、

最も広く採用されたラストの考えを

基本にしようとする。

それは、

子どもの、

あるいは初学者の気持ちに

一致しない。

それゆえ、ここでは、

分数が出来た道筋を

初めに辿って考えることとしたい。

と言っても、

さて一方、数学の世界。

世界では、

日本で算数と呼ぶ物を含めて

「数学」という。

「日本だけが、算数を別扱いにする」

とか。

ソロバンについて考えてみよう。

今販売されているソロバンは

ほぼすべて四つ玉ソロバンです。

戦後は、太平洋戦争後は、

４ケタ毎の印しをやめて、

３ケタ毎になった。

それゆえ、

ソロバン教授は、

３ケタ区切りの

四つ玉ソロバンを教える

あるいは、

四つ玉ソロバンで教える

のが本流です。

四つ玉ソロバンは、

小さな子には難しい。

例えば、

「5に6を加える」には、

「一玉を上げて、

　五玉を払い、

　十玉を上げる。」

つまり、

「+6＝+1－5 +10」

という、

小学一年生に納得させるには

はなはだ困難なことになっています。

そのため、

「昔は,ソロバンは小学三年生から」

と言われていたそうです。

とすると、

そのソロバン教授法は、

四つ玉ソロバンに引きずられて

難しいものになってしまった

と言うべきことです。

十玉ソロバンにすれば、

特に難しいことは無くなりますから。

×分数にもどりましょう。

$12\times\frac{2}{3}$

これを、日本語で読むと、

「12 掛ける 3 分の 2」。

「掛ける 3分(ぶん)」

と言うのが判りにくいですね。

「×÷3」みたいです。

「3 分の 2」と言う数を掛ける

感じでもあります。

日本語でいうと、

「12 の 3 分の 2」。

これなら、

「12 ÷3 ×2」となります。

「12　÷3　×2 」　は、

掛けることと割ることの順序を入れ替えて

「12　×2　÷3 」

と書きかえます。

ここからは、

歴史の小説化にならっての、

数学の算数化です。

英語では、

÷3　を

/3　と書きます。

算数では、

/3　を　$\frac{}{3}$　と書きます。

　12　×2　÷3

＝12　×2　/3

＝12　×2　$\frac{}{3}$

$$=12 \times \frac{2}{3}$$

逆に辿ると、

$$12 \quad \times \quad \frac{2}{3}$$

$$=12 \quad \times 2 \quad \frac{}{3}$$

$$=12 \quad \times 2 \quad /3$$

$$=12 \quad \times 2 \quad \boxed{\div 3}$$

$$=12 \quad \boxed{\div 3} \quad \times 2$$

「掛けることと

　わることの順序は交換できる」

これが、

この説明のポイントでしょうか。

あとは、

表現方法の違いだけのことです。

「掛ける分数」は

　　「等分すること」

と

　　「倍すること」の

　　「組み合わせ」で

す。

分数でわる

結論から始めて

基本に戻る説明は

子どもには

理解されにくい。

山の登り道を

山の頂上から説明するようなものです。

説明の一つずつに

「どうして」

と疑問が湧くのです。

山登りは、

麓から道筋をたどるべきです。

算数も同じです。

論理の一つずつを

流れの中で説明するのは

うまくいきません。

別に準備しておくべきです。

必要な準備を考えてみましょう。

ポイントは、

24÷（6÷2）

＝24÷6×2

割る数を半分にすると、

商は２倍になります。

24÷（6÷3）

＝24÷6×3

割る数を３分の１にすると、

商は３倍になる、

ということです。

問題になるのは、

かっこの中の÷が

かっこが外れると×になるところです。

これが、

分数の説明の前に必要な知識です。

$$12 \div \frac{2}{3}$$

＝12　÷　2/3

＝12　÷　(2÷3)

＝12　÷　2　×3

＝12　×3　÷2

$$=12 \times \frac{3}{2}$$

２分の３は直感的につかめないので初めにもってくるのはダメです。

左のような、

結果から戻っていく説明は

子どもの気持ちに合いません。

この数字では

納得しづらい子もいます。

24÷6×2

＝24÷（6÷2）

の方が、説得力があります。

整数計算で考えらるからです。

次のことが、分数乗除を解き明かします。

	12 ÷6 ×2
＝	12 ÷( )

	18 ÷6 ×2
＝	18 ÷( )

	24 ÷6 ×2
＝	24 ÷ ( )

	30 ÷6 ×2
＝	30 ÷ ( )

	24 ÷8 ×2

$=$	$24 \div (\quad)$

	$30 \div 8 \times 2$
$=$	$30 \div (\quad)$

次の計算を写して確かめなさい。

	12　÷6　×3
＝	12　÷(　)

	18　÷6　×2
＝	18　÷(　)

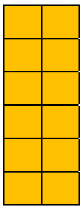
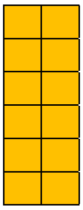
	24　÷6　×3
＝	24　÷(　)

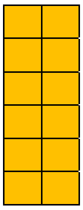
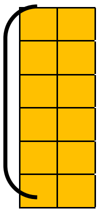
	30　÷6　×3
＝	30　÷(　)

	24	÷8 ×4
＝	24	÷( )

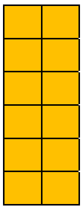
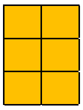
	30	÷8 ×2
＝	30	÷( )

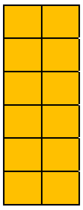
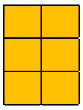
結合の法則

 ÷  × 2 ＝ 2

 ÷ ( ÷ 2) ＝ 2

もう一つ類例を示します。

 ÷  × 2 ＝ 4

 ÷ ( ÷ 2) ＝ 4

左の計算を数式に表しなさい。

$$\boxed{12} \div \boxed{12} \times \boxed{2} = 2$$

$$\boxed{12} \div (\boxed{}\quad\boxed{}) = 2$$

割る大きさを２分の１にすると、
商は２倍になる

$$\boxed{12} \div \boxed{6} \times \boxed{2} = 4$$

$$\boxed{12} \div \boxed{}\quad\boxed{}) = 4$$

割る大きさを２分の１にすると、

商は２倍になる

割る大きさを

２分の １ にすると、

商は2倍になる。

これが、÷分数の説明に必要な考えです。
分数乗除で難しいのはこれだけ、と言っても差し支えありません。あとは、**計算順序**の変更と**表記法**だけの問題です。

分数乗除へのステップ　以下の２ページを見ずに書きなさい。

分数の乗除は

自然数乗除の**表記法の違い**だけの問題です。

×2 ÷6 と ÷6 ×2 とは、

先に見たように、掛け算と割り算との順序を入れ替えただけの式です。

これを、次のように変化させると、**分数乗除の法則**が見えてきます。

<table>
<tr><td colspan="2">×２ ÷６ ＝ ÷６
×２</td><td rowspan="2">÷6×2=×2
÷6
上の等式から
左の式のように変化して
$\div\left(\frac{6}{2}\right) =$</td></tr>
<tr><td>＝×(２÷６)
２÷６を英語風に表すと
＝×２/６</td><td>＝÷(６÷２)
６÷２を英語風に表すと
＝÷(６/２)</td></tr>
</table>

$2/6$ を数学で表すと $= \times \frac{2}{6}$	$6/2$ を数学で表すと $= \div \left(\frac{6}{2}\right.$	$\times \frac{2}{6}$ ＊分数で割る計算が、 逆数を掛ける計算 になっています。

つまり、分数は本来、自然数の乗除の複合を表すと考えれば、

自然数の乗除の法則が判れば

分数乗除にそれ以上の問題は何もないのだとわかります。

単に、**表記方法の違い**にすぎないのです。

分数が

整数乗除を表しながら、

大きさも示すことが出来るのは、

自然数が

等倍を表しながら、

大きさを表せるのと

同じ

であると考えると

数全体の流れが自然です。

「分数」は、
「自然数と別のもの」
と分類するのでなく、
自然数乗除の複合
と考えれば
整数計算の話
となります。

練習問題多数で説得しましょうか。

分数でわることが、

分母分子を逆にしてかけることと

等しい、

というのは、

分数計算で説明するのでなく、

整数計算の表現形式の変化

と捉えれば、

小学三年生にも理解できる事柄です。

（小学三年の項を参照）

今は、自然数からの説明でなく、

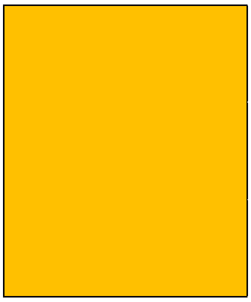
いきなり次のような形で

形式的な導入になっています。

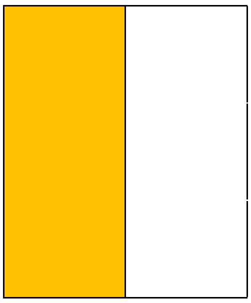
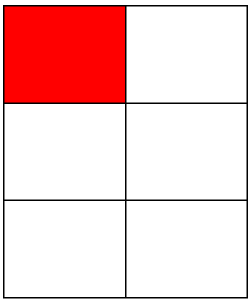
$$\mathrm{M} \div \mathrm{N} = \frac{M}{N}$$

それは、

自然数の定義からは導けない論理になっているからです。


を

２等分して　　　　　さらに**３等分**すると

全体で６等分になります。

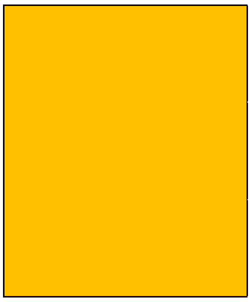
式で表せば、

$$\div 2 \quad \div 3$$

$$= \div \ (2 \times 3)$$

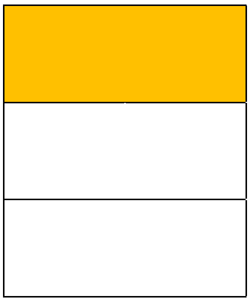
です。

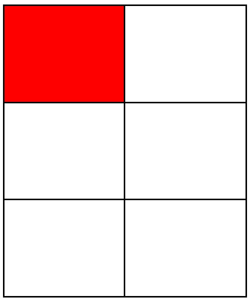
２等分と３等分の順序を交換して



を

３**等分**して　さらに２**等分**すると





全体で６等分になります。

式で表せば、

$$\div 3 \quad \div 2$$

$$= \div \ (3 \times 2)$$

です。

$$\div 2 \quad \div 3$$

$= \quad \div 3 \quad \div 2$ です。

次に、

A

$$\boxed{\div 3 \quad \times 2}$$

$$= \div \quad (3 \div 2)$$

$$= \div \quad (3 / 2)$$

$$= \boxed{\div \frac{3}{2}}$$

同じ $\div 3 \times 2$ が、

$$\boxed{\div 3 \quad \times 2}$$

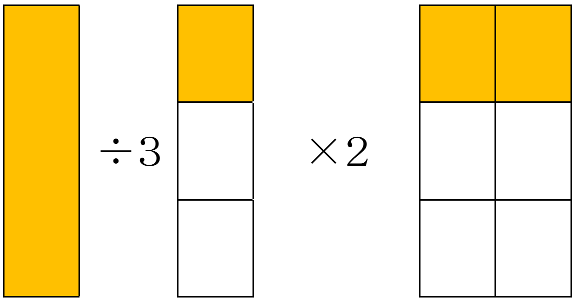
$= \times 2 \quad \div 3$

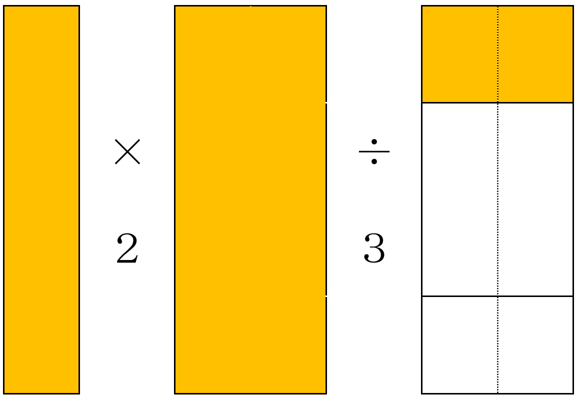
$= \times 2 \ /3$

$$= \boxed{\times \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{\div \frac{3}{2}} = \boxed{\times \frac{2}{3}}$$

　子どもが納得するまで
多くの類例が必要です。


÷3
×2


×
2
÷
3

分数計算に導くには、

2÷3のように、

分数になる数を用いるべきでしょうが、

最初からそれでは、

納得させることが難しい。

整数の類例が必要です。

つまり、

「割る数を半分にすると、

　商は倍になる」

或いは、

「割る数を３分の１にすると、

　商は３倍になる」などです。

説得のためには、

子どもたちに

実際に計算してもらう必要があります。

24÷（8÷2）＝

24 ÷8 ×2 ＝

24÷（6÷2）＝

24 ÷ 6×2 ＝

24÷（4÷2）＝

24 ÷4 ×2 ＝

24÷（12÷2）＝

24 ÷12 ×2 ＝

24÷（8÷2）＝

24 ÷8 ×2 ＝

24÷（8÷2）＝

24 ÷8 ×2 ＝

これらを理解させようとして、

分数で説明しようとすると

失敗します。

問題は、

整数計算の理解にあります。

12　÷4　=3 ですが、 割る数の４を２分の１にすれば、 即ち、４を２で割れば、

商の３は、２倍の６になります。

12　÷（4÷2）＝　6

12　÷4　×2　＝　6

ここが、

「÷分数」の勘所です。

類例を幾つも幾つも練習します。

そのうちに、

「判った。もういい。」

となります。

あとは、4÷2の分数化だけです。

「分数での割り算」

が理解しがたいのは、

このような

整数での理解が無いままに

分数で説明しようとするからです。

分数計算は、

整数計算の複合形態だと見れば、

さほど難しいことではありません。

いつまでも、

「分数が難しい」と思わせているのは、

分数を

整数から独立したもの

として捉えようとしているからです。

こう考えると、

分数は、

わり算を勉強した３年生に学習可能です。

その他にも説得方法はありますが、

テラヲ式算数入門　分数編　A4 シリーズに沢山の類例を載せていますので

ご参照ください。

５年生領域の割合の問題も

整数計算で説明してから

小数計算に移れば簡単なのに、

誰が言いだしたのか

明治になって、

江戸時代の知恵を捨てて

西洋風の小数計算での説明にしたのが

子どもの困る理由です。

60 円の３割は、

60 円÷10×３と考えると

カンタンです。

60 円が３割ならば元にする量は

60 円÷3×10

と、小学３年生の課題です。

一度、整数計算で理解したのち、

それを小数で表現すると、

と導けば、

ただの表示方法の変化に過ぎないので

理解しやすいのです。

２等分し、さらに３等分すること

すなわち、

（÷2÷3）は、

÷（2×3）となり、

（÷ｍ÷ｎ）は、

÷（ｍ×ｎ）となることは、

いくつかの図解で理解できます。

これの理解の準備として、

「2を引き、さらに3を引くこと」

すなわち、

（−2−3）は、

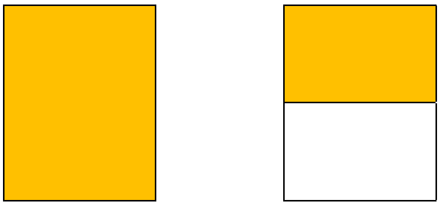
−（2+3）となり、

（−m−n）は、

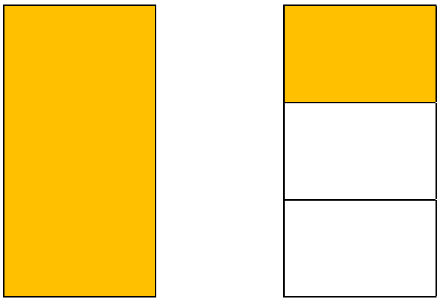
−（m+n）となることを置けば、

さらに理解を促進できます。

初めは図を描きながら、



「1の中に、2分の1は幾つありますか。」



「1の中に3分の1は幾つあるか。」

1の中に4分の1は幾つあるか。

1の中に5分の1は幾つあるか。

1の中に6分の1は幾つあるか。

難しくなるぞう！

1の中に10分の1は幾つあるか。

『かんたんや！10！』

難しくなるぞう！

1の中に100分の1は幾つあるか。

1の中に200分の1は幾つあるか。

もっと難しくなるぞう！

1の中に千分の1は幾つあるか。

1の中に2千分の1は幾つあるか。

私立の小学校でしたが、

一年生の教室でこれを

「6年生の問題だけど出来るかな」

と言いながら答えてもらうと、

教室中が湧きたちます。

50年近くも前のことですが、

今でも目に浮かびます。

もちろん、家に帰って、

『今日は6年の問題をやった！』

と報告です。

そうすると、

保護者の方々が

『ほう、そんなことも教えてくれるのか』

と喜ばれますから、

子どもたちの担任への信頼も増します。

そうなれば、

言うことも良く聞いてくれますから、

学級運営はかなり楽になります。

アイテムとして、

効果の大きい方法です。

出来て当たり前のことばかり

を教えていたのでは、

感動が少ないのです。

出来て当たり前のことばかりでは、

出来ていないことが目につきます。

そうなれば小言も増えます。

いずれやらなくてはいけないけれど、

まだ出来なくても構わないことを

指導内容に挟み込めば、

子どもの喜びはひとしおです。

未来も明るくなります。

人間、

未来が明るければ

暗い日も希望を持って生きられます。

「夜の明けない日は無い」と言う思いは

人生の松明です。

子どもたちを勇気づける

せっかくのチャンスを生かすのに、

こんな簡単な方法があるのです。

是非使ってほしいところです。

逆数

数学では、

「2つの数を掛け合わせると1になる数を

　互いに逆数という」と

定義しています。

またまた想像ですが、

この考えの元は、

×2の逆が÷2で、
×3の逆が÷3

ではなかったろうか。

×2÷2＝×1

×3÷3＝×1

×m÷m＝×1です。

分数も含めて、かけたら1

と言うのは、

かなり後のことのような気がします。

数は、

前に×（かける）があろうと無かろうと、

いつでも×（かける）がついている

と考えるべきものですが、

しばらく脇に置いて考えましょうか。

$2 \div 3 = \frac{2}{3}$

$5 \div 7 = \frac{5}{7}7$

$= \frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$

$=（2 \div 3）\times（5 \div 7）$

$= 2 \div 3 \times 5 \div 7$

$= 2 \times 5 \div 3 \div 7$

$=（2 \times 5）\div（3 \times 7）$

$= \frac{2 \times 5}{3 \times 7}$

掛ける分数の場合、
分子は**かけること**を表し、
分母の数は**割ること**
を表している。

$2÷3=\frac{2}{3}$

$5÷7=\frac{5}{7}$7

$=\frac{2}{3}÷\frac{5}{7}$

＝（2÷3）÷（5÷7）

＝2÷3÷5×7

＝2×7÷3÷5

＝（2×7）÷（3×5）

$=\frac{2×7}{3×5}$

割る分数の場合、

分子は$\boxed{\text{割ること}}$を表し、
分母は$\boxed{\text{かけること}}$を表している。