復習から

ｘについての１次式　とは、

ｘの指数が１のこと（x^1）を言う。

即ち、a、b を定数とするとき、

$$ax^1+b$$

ただし、もちろん、指数の１は書かないから

$$\boxed{ax+b}$$

x についての２次式　とは、

x の指数が 2 のこと（x^2）を言う。

即ち、a、b、c を定数とするとき、

$$\boxed{ax^2 + bx + c}$$

２つの x の１次式（ただしここでは、x の係数は１とします）

（x +2）と（x +3）の積は　２次式です。

$$(x+2)(x+3)$$
$$= x^2+5x+6$$

$(a+b)\ (a-b)$

$= \quad a^2-b^2$　は、

ａについても

ｂについても２次式です。

a^2-b^2　は、

$(a+b)$　でも

$(a-b)$　でもわり切れるはずです。

やってみましょう。

$$
\begin{array}{r|lll}
 & a & +b & \\
\hline
a-b & a^2 & & -b^2 \\
-) & a^2 & -ab & \\
\hline
 & & +ab & -b^2 \\
 & -) & +ab & -b^2 \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ccc}
 & a & -b & \\ \cline{2-4}
a+b & a^2 & & -b^2 \\
-) & a^2 & +ab & \\ \cline{2-4}
 & & -ab & -b^2 \\
 & -) & -ab & -b^2 \\ \cline{2-4}
 & & & 0
\end{array}
$$

x についての３次式　とは、

x の指数が３のことを言う。

即ち、a、b、c、d を定数とするとき、

$$\boxed{ax^3 + bx^2 + cx^1 + d}$$

$\boxed{ax^3}$ のように、

２次以下の項が無くとも３次式という。

ここでは、

x^3 の係数が 1 の場合を調べます。

$$(x+1)(x+2)(x+3)$$
$$= (x+1)(x^2+5x+6)$$
$$= x(x^2+5x+6) + 1(x^2+5x+6)$$
$$= (x^3+5x^2+6x) + (x^2+5x+6)$$
$$= \mathbf{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$$

展開は順次計算していけばよいので単純ですが

因数分解についてはまた別の方法が必要なので

別項で考えます。

$(x+1)^3$

$= \quad x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$(a+b)^3$

$= \quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3$

$= \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

いろいろありますが、

ここでは　a^2-b^2

$= (a-b)(a+b)$

にならって

$a^3 - b^3$　を

因数分解することを考えます。

$a^3 \ -b^3$ を

$(a-b)$ でわると、

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & a^2 & +ab & +b^2 & \\
\cline{2-5}
a-b & a^3 & & & -b^3 \\
-) & a^3 & -a^2b & & \\
\cline{2-5}
 & & +a^2b & & \\
 & -) & +a^2b & -ab^2 & \\
\cline{2-5}
 & & & +ab^2 & -b^3 \\
 & & & +ab^2 & -b^3 \\
\cline{2-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

商が $(a^2 \ +ab \ +b^2)$ で

余りがありませんので、

$a^3 \ -b^3$

$$= (a-b)\ (a^2 \ +ab \ +b^2)$$

として因数分解できました。

$a^3 \ +b^3$

を　$(a+b)$　でわると

どうなるのでしょうか。やってみましょう。

$$
\begin{array}{r|llll}
 & a^2 & -ab & +b^2 & \\
\hline
a+b & a^3 & & & +b^3 \\
-) & a^3 & +a^2b & & \\
\hline
 & & -a^2b & & \\
 & -) & -a^2b & -ab^2 & \\
\hline
 & & & +ab^2 & +b^3 \\
 & & -) & +ab^2 & +b^3 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

商が　$(a^2 \ -ab \ \ +b^2)$　で

余りがありませんので、

$a^3 \ +b^3$

$$= (a+b)\ (a^2 \ -ab \ \ +b^2)$$

として因数分解できました。

ついでに、

$a^4 - b^4$　を**因数分解**してみましょう。

$a^2 = A$

$b^2 = B$　とおくと、

$a^4 - b^4$

$= A^2 - B^2$

$= (A - B)(A + B)$

$= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

$= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

AやB　これは、

必ず置き換えなくてはならないステップ

ではありません。

a^4　を　$(a^2)^2$

と出来れば省略しても構いません。

２次式から考えます。

$$x^2-1$$

$$=(x+1)(x-1)$$

$$x^2+1$$

$$=(x+i)(x-i)$$

３次式では

$$x^3-1$$

$$=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$x^3+1$$

$$=(x+1)(x^2-x+1)$$

4次式では

x^4-1

$= \quad (x^2+1) \quad (x^2-1)$

$= (x+i)(x-i) \quad (x+1)(x-1)$

X^4+1

$= (x^2+i) \quad (x^2-i)$

$= (x^2+i) \quad (x+i)(x-i)$

(x^2+i) がうまくいかない感じに見えますが

どうなんでしょうか。

６次式では、３次式同士の積に分解できるので、

x^6-1

$=\ (x^3+1)(x^3-1)$

$=\ (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

$(x+1)(x-1)$

でわりきれるので、

X^6-1 を (x^2-1) でわってみると

商は (x^4+x^2-1)

よって

$=\ (x+1)(x-1)(x^4+x^2-1)$

うーんこれだと

これ以上の因数分解はちょっと、となりますね。