複素数の演算

４の平方根は$\sqrt{4}$

すなわち

$\sqrt{4}$　を二乗すると　４

同じように

$\sqrt{-1}$　を２乗すると　-1

$\sqrt{-2}$　を２乗すると　-2

$\sqrt{a}$　を２乗すると

aの正負にかかわらず　a

$\sqrt{-1}$　を

アルファベットの小文字 **i** で表すと

§02　(a ,bk)で学んだことがそのまま当てはまる。

複素数の演算

通称**数直線**と呼ばれるものの上にある数を

直線数と呼んでみましょう。

すると、

平面数という言葉が思い浮かびませんか。

直線上に数を目盛ったならば、

平面上にも数を目盛ってみよう、

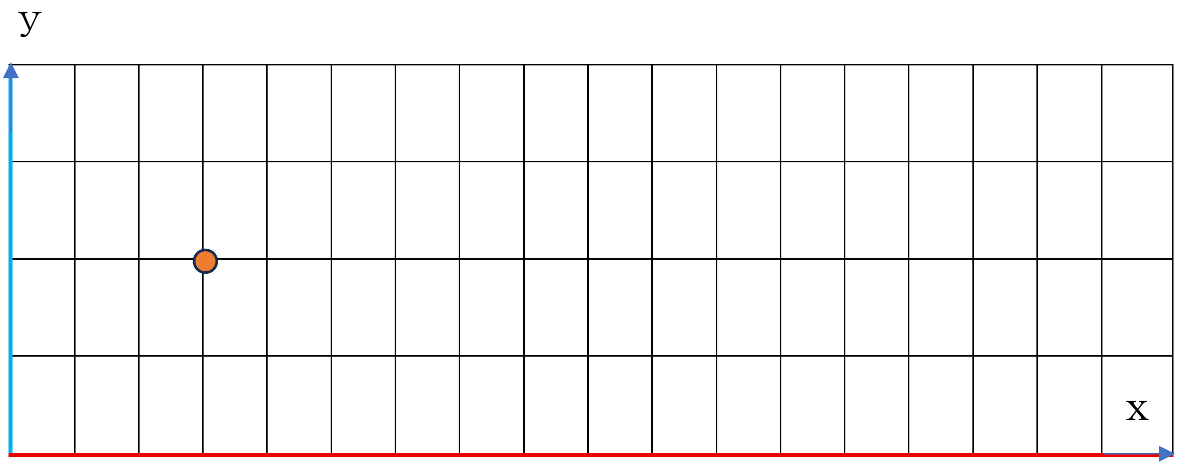
となりますね。

小学校から、**座標**を学んできました。

ｘ軸と**ｙ軸**が直交している座標でした。

１つの点が、２つの数を同時に表せる。

そのような特徴があります。



赤丸の位置は　**ｘ軸**は３　　**ｙ軸**は２。

そして、(3、2) と表すのでした。もちろん (3、2)

左側の数がｘ軸、

右側の数がｙ軸を表す約束でしたね。

この方法だと、

$y = 3x$　などのように、ｙが左でｘが右の式の場合、
ｘが２の時、ｙは幾らかなどを考えるとき
$y = 3 \times 2$　でｙは６。
右と**左**がいつも左右反対で気持ち悪い。
思いませんでしたか？　でもまあ仕方がない。

複素数の演算

数直線は**実数**を表すということでした。

実数とは

整数、分数、小数、無理数の全てのことでしたね。

でも、

それぞれの数は、

いずれも、点の現れとして見てきました。

そうすると、

点の集まりが数直線なのでしょうか。

点が集まって、連続した数になるのでしょうか。

数直線は、

実数と呼ばれるもので埋め尽くされるものでしょうか。

いささか疑問が残りますね。

ま、それはともかく

直線が数を表すならば、

平面も数を表す

と考えたいですね。

複素数の演算

その工夫の一つが**直交座標**でした。

しかし、

点が表す数ｘとｙは

（3，**2**）のように同じ形をしています。

（3，**3**）ならば猶更のことです。

なんとかこれがｘ、これがｙと示せないものか。

ｘ軸は**数直線**と呼ばれてきたものですからそのままにして、

ｙ軸の方向に**別の情報**を付け加えたら

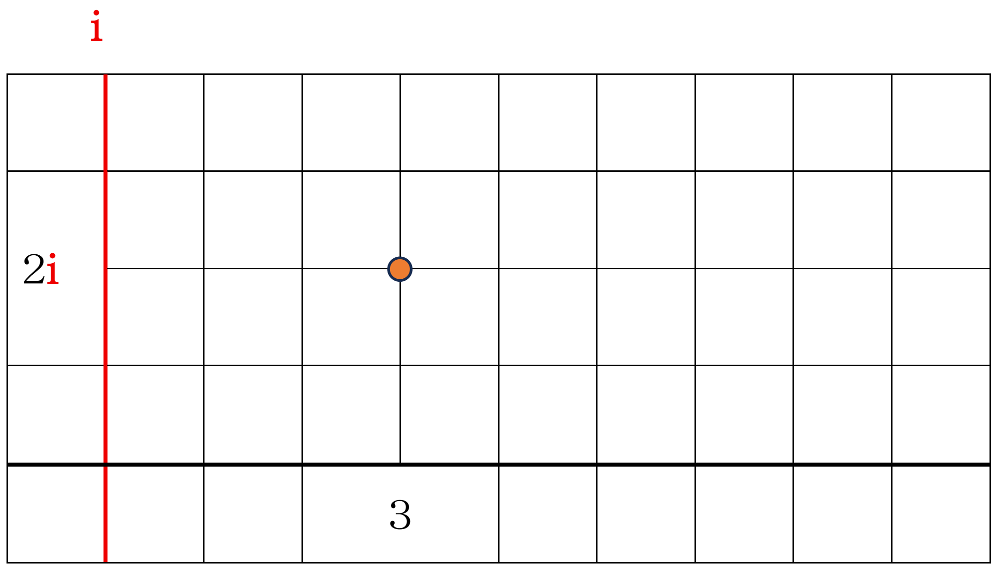
どうだろうか。

一度やってみましょう。

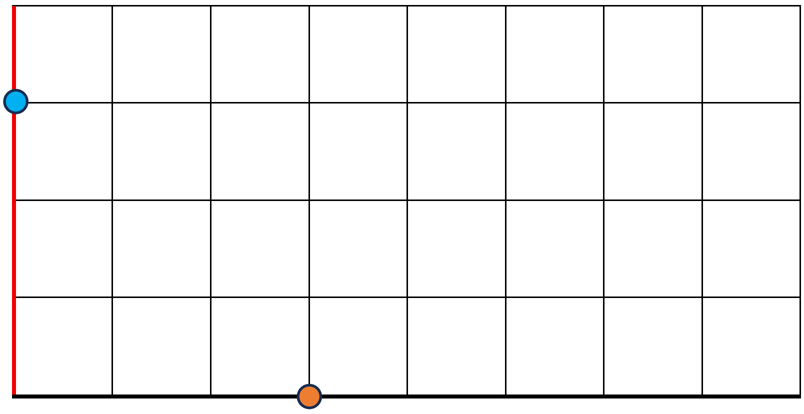
ｘ軸を 90°**左回転**したものを**ｉ軸**と見て、

ｉをつけることにしてみます。

先ほど、（3、**2**）と表された点は



（**3**、**2**i）と表すことが出来ます。

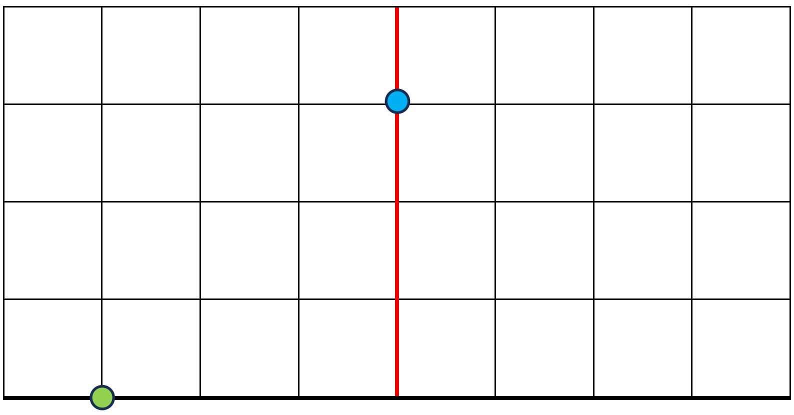


（3、0i）と表された数を 90° **左回転**すると、

（0、3i）です。

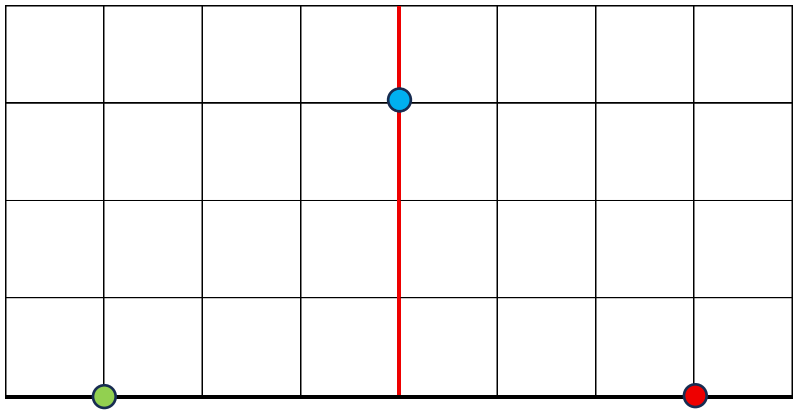
さて、もう一度 90° **左回転**すると、

（0、3i）は 90° **左回転**すると



（−3、0i）となります。

つまり、



（3，0）を 90°左回転すると

（0，3i）となり、さらに 90°左回転すると

（-3、0i）となります。

（3，0i）×i＝（3i、0）＝（0、3i）

（0、3i）×i＝（0、$3i^2$）＝（0、-3）

このことから、

90°左回転を２度すれば 180°の回転で、

＋3 は－3 になりました。

×i×i

すなわち、

i^2　は　－1　ということになります。

複素数の演算

いま、

i を掛けることについてみました。

加法については、

§03の **k** を **i** に替えれば

全く同じなので省略します。

残る**わり算**は、

普通のわり算をすると、

実数と虚数を行き来してちょっと見えづらいので、

分数を使います。

（4a ＋6ｂ）÷2＝2a ＋3ｂ　と同じように、

（4 ＋ 6i ）÷2 ＝ 2 ＋3i

（4 ＋ 6i ）÷2i ＝$\frac{4}{2i}$ ＋3

$\frac{4}{2i}$これをどうするか、

複素数の演算

わり算では、

「割られる数とわる数の両方に

　同じ数を掛けても商は変わらない」を使って、

わる数にｉをかけて−2、

割られる数にもｉをかけて 4i

$\frac{4\times i}{2i\times i}$ で、$\frac{4i}{2i^2}$商は $\frac{4i}{-2}$つまり、−2i

（4 ＋ 6i ）÷i

$=\frac{4+6i}{i}$

$=\frac{(4+6i)\times i}{i\times i}$

$=\frac{(4i+6i^2)}{-1}$ ＝−4i +6

3+2i でわるときは、

分母分子に 3−2i を掛けて

分母を実数にします。

1 を 3+2i でわるには、

$$\frac{1(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$

$$=\frac{(3-2i)}{(9+4)}$$

$$=\frac{(3-2i)}{(13)}$$

a+bi　は必ず、

a−bi　掛けることによって

$a^2-(bi)^2 \quad = \quad a^2-b^2i^2$

$a^2-(bi)^2 \quad = \quad a^2+b^2$　のように、

分母を実数化できます。