§03　複素数の演算

自然数の範囲ではいつも

足し算、掛け算の範囲で答えがありました。

　　　引き算はいつも答えがあるとは言えませんでした。

負の数を考えだしたので、

引き算がいつも出来るようになりました。

　　　しかし、

　　　わり算がいつも出来るとは言えませんでした。

分数を考えだしたので

わり算がいつも出来るようになりました。

　　　これで満足していました。

しかし、

２次方程式の解の公式の中の

$\sqrt{\ }$の中の数がマイナスになったりするので

大問題になりました。

２乗するとマイナス１になる数、つまり、

負の数の平方根を考えだしたので

複素数が出来ました。

ここでは、

複素数の加減乗除を考えます。

複素数の計算のうち、

先ず加減ができるかどうか観察してみよう。

$$\begin{array}{rrcr} & 3 & + & 2i \\ +) & 1 & + & 4i \\ \hline & 4 & + & 6i \end{array} \qquad \begin{array}{rrcr} & 4 & + & 6i \\ -) & 3 & + & 2i \\ \hline & 1 & + & 4i \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} & 1 & + & 4i \\ -) & 4 & + & 6i \\ \hline & -3 & - & 2i \end{array} \qquad \begin{array}{rrcr} & 1 & + & 2i \\ -) & 3 & - & 4i \\ \hline & -2 & + & 6i \end{array}$$

加減はいつでもできそうですね。

掛け算はどうでしょうか。

$$
\begin{array}{rccc}
 & 3 & + & 2i \\
\times) & 2 & + & \\
\hline
 & \boxed{6} & \boxed{+} & \boxed{4i}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rccc}
 & 3 & + & 2i \\
\times) & & + & 2i \\
\hline
 & 6i & + & 4i^2 \\
 & 6i & + & -4 \\
 & \boxed{6i} & \boxed{-} & \boxed{4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
 & 3 & + & 2i \\
\times) & 2 & + & 2i \\
\hline
 & 6 & + & 4i \\
 & 6i & + & 4i^2 \\
+) & -4 & + & 6i \\
\hline
 & \boxed{2} & \boxed{+} & \boxed{10i}
\end{array}
$$

実数を掛ける掛け算

虚数を掛ける掛け算

複素数を掛ける掛け算のいずれも問題なくできました。

ところで、問題は**わり算**です。

$i \div i$ は１でよいでしょう。

$2i \div i$ も　２でよいでしょう。

問題は、

$2 \div i$ をどうしましょうか。

わり算は、$\boxed{\text{わる数}}$と$\boxed{\text{わられる数}}$の両方に

同じ数を掛けても商は変わらない

という法則がありましたね。

そこで、

$$
\begin{aligned}
& 2 \div i \\
&= (2 \times i) \div (i \times i) \\
&= 2i \div (i^2) \\
&= 2i \div (-1) \\
&= -2i
\end{aligned}
$$

Iのような純虚数であるのでなく

$3+2i$　のような場合はどうしましょうか。

$$(3+2i)(3-2i)$$
$$=3^2-2^2i^2$$
$$=9-4(-1)=9+4$$

が出来ますので、わり算は分数を使って

$\dfrac{2+3i}{3+2i}$　の計算は

分母と分子に　$(3-2i)$　をかけて

$$=\frac{(2+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$

あとは既に出来ることが確認されている

複素数の掛け算を行えばよい。

$$=\frac{12+5i}{9+4}=\frac{12}{13}+\frac{5i}{13}$$

複素数は、

複素数の範囲内で

加減乗除の四則全てが行えるのでした。