昔、数学の参考書に

「叩いて　さすれば　元のまま」

という言葉が載っていた。

言い方としては面白いけれど、

正確には何を言っているのか示していない。

２を足して、２を引けば元のまま、

２を掛けて、２でわれば元のまま

といった意味です。

足した数を引けば元に戻る
掛けた数で割れば元に戻る

と言い換えましょう。

今回はその手法を使います。

f(x)と g(x)の積を微分するときは
定義に従って

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

とする。

式の変化が多いので、先に

分子のみの式の変化を示します。

元の式

$$f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)$$

から　$f(x) \cdot g(x+h)$　を引き、後で
　　　$f(x) \cdot g(x+h)$　を足します。

$$= f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)$$
$$- f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h)$$

左側部分の

f (x+h)・g(x+h)

－ f (x)・g(x+h)

をg(x+h)でくくって

$$\{ f(x+h) - f(x) \} g(x+h)$$

右側部分の

－ f (x)・g(x)＋ f (x)・g(x+h)

の順序を変えて

＋ f (x)・g(x+h)－ f (x)・g(x)

さらに、f (x)でくくって

$$+ f(x) \{ g(x+h) - g(x) \}$$

これらのことと

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

を組み合わせると

$$\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

前後を分けて微分すると

$$\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}\ g(x+h)}{h}$$

$$=\{f'(x)\}\ g(x+h)$$

（ここがちょっと「**構わないの？**」って感じですが。）$\cong\ \{\ f'(x)\}\ g(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x)\ \{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$= f(x)\ g'(x)$$

全てを合わせると

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$\cong f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

覚えやすいようにカンタンにすると

$$= f'g + fg'$$

これを使うと、

f(x)÷g(x)　商の微分を求めるのに

積の微分の公式

$\mathrm{f(x)} \times \dfrac{1}{g(x)}$

を使えることになります。

その前に、$\dfrac{1}{g(x)}$の微分が必要ですが。