sinx の微分には

幾つかの準備が必要です。

一つは、①「sin の**加法定理**」です。

理解できない場合は

この入門シリーズでは２巻４章§04 の

三角関数の加法定理で詳しく説明しています。

$$\sin(\alpha+\beta)$$

$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta \quad + \quad \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)$$

$$=\cos\alpha\cdot\cos\beta \quad - \quad \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

もう一つは

②弧度法を使った**挟み撃ちの原理**へ進みます。

さらに、もちろん微分ですから、

③「**微分の定義**」に基づく演算です。

この３つです。

①　sin x の「加法定理」

$\sin(x+h)$

$$=\sin x\cdot\cos h + \cos x\cdot\sin h$$

②弧度法を使った

挟み撃ちの原理は 3305 を見てください。

③「微分の定義」

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

では、**微分の定義**に従って

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

f に **sin** をあてはめます。

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

ですから、

$$\boxed{\sin(x + h)}$$

$$= \sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h$$

となります。

定義式にあてはめると

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h}$$

分子部分を整理すると

$$\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x$$

$$\boxed{=} \sin x \cdot \cos h - \sin x + \cos x \cdot \sin h$$

$$\boxed{=} \sin x (\cos h - 1) + \cos x \cdot \sin h$$

$$\boxed{= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \cdot \sin h}{h}}$$

$$\boxed{= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \cdot \sin h}{h} \right\}}$$

ここで、＋から後ろは

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\ \cdot \sin h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}$$

$$=\cos x\cdot 1$$

$$=\cos x$$

残るのは＋の前の部分

$$\frac{(\cos h-1)}{h}$$

$$=\frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h\ (\cos h+1)}$$

$$=\frac{\cos^2 h-1}{h\ (\cos h+1)}$$

$$=\frac{-\sin^2 h}{h\ (\cos h+1)}$$

$$=\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{-\sin h}{(\cos h+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\,(\cos h-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sin x\cdot\frac{(\cos h-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sin x\cdot\frac{(\cos h-1)(\cos x+1)}{h(\cosh+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{-\sin h}{(\cos h+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sin x\cdot 1\cdot\frac{-0}{1+1}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sin x\cdot 1\cdot 0$$

$$=0$$

よって、sinx の微分は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\frac{\cos x\cdot\sin h}{h}\right\}$$

$$=0+\cos x$$

$$=\cos x$$