対数の**微分**（**導関数**）を

定義に従って求めてみる。

$$(\log_a x)'$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

対数の引き算はわり算になるので、

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}$$

分子の各項を、分母の x でわって、

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})$$

ここから少し技が必要

$$\frac{h}{x} = t$$　と置くと

これは技ですね。

$$h = tx$$

	$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a(1 + \frac{h}{x})$
$=$	$\lim_{h\to 0} \frac{1}{tx} \log_a(1 + \frac{tx}{x})$

$=$	$\frac{1}{x} \lim_{t\to 0} \log_a(1 + t)^{\frac{1}{t}}$

同じ式ですが、

$=$	$\frac{1}{x} \lim_{t\to 0} \log_a(1 + t)^{\frac{1}{t}}$

赤い字の部分の計算を計算します。

$$\lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

t が 10 分の 1 ならば

（1+0.1）を$\frac{1}{t}$乗　即ち 10 乗。

t が 100 分の 1 ならば

（1+0.01）を$\frac{1}{t}$乗　即ち 100 乗。

$\frac{1}{t}$乗は見づらいので、変更します。

その計算を次のページ以降に少し丁寧に示します。

スマホの計算機を使ってやってみてください。

$(1+\frac{1}{10})^{10}$

$=1.1^{10}$

$=1.1$ ^ 10 ← （計算機の手順）

$=2.5937\cdots\cdots$

$(1+\frac{1}{100})^{100}$

$=\ 1.01^{100}$

$=\ 1.01$ ^ 100 ← （計算機の手順）

$=2.7048\cdots\cdots$

$(1+\frac{1}{1000})^{1000}$

$=1.001^{1000}$

$=1.001$ ^ 1000 ← （計算機の手順）

$=2.7169\cdots\cdots$

$$(1+\frac{1}{10000})^{10000}$$

$= 1.0001^{10000}$

$=$ 1.0001＾1 万　　←（計算機の手順）

$=2.7181\cdots\cdots$

$$(1+\frac{1}{100000})^{100000}$$

$= 1.00001^{100000}$

$=$ 1.00001＾10 万　　←（計算機の手順）

$=2.7182\cdots\cdots$

$$(1+\frac{1}{1000000})^{1000000}$$

$= 1.000001^{1000000}$

$=$ 1.000001＾100 万　←（計算機の手順）

$=2.718280\cdots\cdots$

ある値に近づいていってるようです。

$$\left(1+\frac{1}{10000000}\right)^{10000000}$$

$= 1.0000001^{10000000}$

$= 1.0000001$ ^ 1 千万

$= 2.718281\cdots\cdots$

$$\left(1+\frac{1}{100000000}\right)^{100000000}$$

$= 1.00000001^{100000000}$

$= 1.00000001$ ^ 1 億

$= 2.7182818\cdots\cdots$

$$\left(1+\frac{1}{1000000000}\right)^{1000000000}$$

$= 1.000000001^{1000000000}$

$= 1.000000001$ ^ 10 億

$= 2.7182818\cdots\cdots$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$= 2.7182818 \cdots\cdots\cdots$$

$$= e$$ （自然対数イー）

	$(\log_a x)'$

途中は先に見た通り

$=$	$\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}$

赤い字の部分の計算をしたところ

自然対数*e*となりましたので、

$=$	$\frac{1}{x}\ell\mathrm{og}_a e$

底の変換公式により

$=$	$\frac{1}{x}\frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{x}\frac{1}{\log_e a} = \frac{1}{x\log a}$

対数関数の微分でした。

更に驚くべきことが！

	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$

これが

対数の底が a でなく、

e　ならば、

＝	$\dfrac{1}{x}\log_e e$
＝	$\dfrac{1}{x}$

つまり、

底を自然対数eとするとき

（$\log x$）を微分すると

$\dfrac{1}{x}$　となるのです

判らなくとも出来る微分の

抜け落ちた部分です。