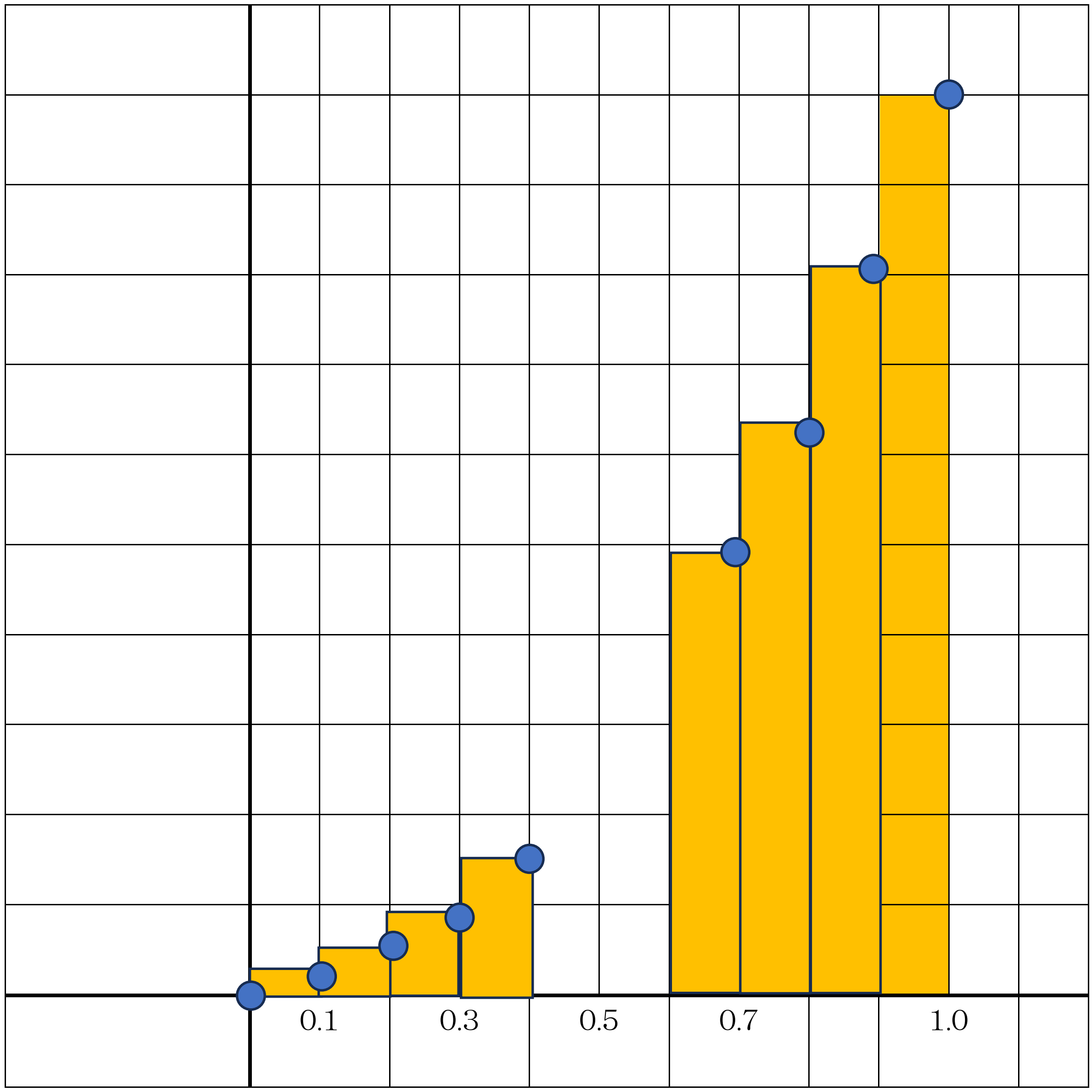
区分求積法

歴史的には、
微分の逆としての**積分**という考え方より、
細かく分けて、**その和**を求める
区分求積法の方が先です。

しかし、
これは色々の場合ごとに
けっこう技が必要なので
微分の逆が使いやすいのです。

一つ、例を挙げてみましょう。

$y = x^2$ のグラフと ｘ軸とに囲まれた図形のうち、 ｘが０から１までの面積を 求めてみましょう。



● は、$y = x^2$ を表す点とする。

x を 10 等分して

それぞれの面積は、

正確ではないが、

横×高さで表すと、

0.1×0.1^2

$+0.1 \times 0.2^2$

$+0.1 \times 0.3^2$

…

…

…

$+0.1 \times 0.8^2$

$+0.1 \times 0.9^2$

$+0.1 \times 1.0^2$

と表すことができますね。

この、10 等分を

100 等分、1000 等分と細かくすれば

だんだん正確な値に近づきますね。

そこで、

ｎ等分のｎを

無限大にしていけば

本当に正確に表すことができるはず

というのが

区分求積法という考え方です。

式は次のようになります。

横×高さ

$$\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$+\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2$$

$$+\frac{1}{n}\times\left(\frac{3}{n}\right)^2$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$+\frac{1}{n}\times\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

これを整理すると

$$\frac{1}{n^3}\times(1^2 \ +2^2 \ +3^2+ \ \cdots\cdots+\cdots \qquad +n^2)$$

ここで、

自然数の２乗の和の計算が

必要となります。

区分求積法

これは、数学Ｂで扱われるものですが、
ここで考えることにします。

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \qquad\qquad + n^2$

ここで、
ちょっとした**技**が必要になります。

この方法を思いついた人は
ずいぶん色々の計算を試みた人
でしょうね。

$$k^3 - (k-1)^3$$
$$= k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1)$$
$$= +3k^2 - 3k + 1$$

	k^3	$-$	$(k-1)^3$	$=$	$3k^2 - 3k + 1$
$k=1$ のとき	1^3	$-$	0^3	$=$	$3\cdot1^2 - 3\cdot1 + 1$
$k=2$ のとき	2^3	$-$	1^3	$=$	$3\cdot2^2 - 3\cdot2 + 1$
$k=3$ のとき	3^3	$-$	2^3	$=$	$3\cdot3^2 - 3\cdot3 + 1$
$k=4$ のとき	4^3	$-$	3^3	$=$	$3\cdot4^2 - 3\cdot4 + 1$
…					…
$k=n$ のとき	n^3	$-$	$(n-1)^3$	$=$	$3\cdot n^2 - 3\cdot n + 1$

タテに全てを足すことを考えます。

	k^3	−	$(k-1)^3$	＝	$3k^2-3k\ +1$
$k=1$ のとき	1^3	−	0^3	＝	$3\cdot1^2-3\cdot1\ +1$
$k=2$ のとき	2^3	−	1^3	＝	$3\cdot2^2-3\cdot2\ +1$
$k=3$ のとき	3^3	−	2^3	＝	$3\cdot3^2-3\cdot3\ +1$
$k=4$ のとき	4^3	−	3^3	＝	$3\cdot4^2-3\cdot4\ +1$
…					…
…					…
$k=n$ のとき	n^3	−	$(n-1)^3$	＝	$3\cdot n^2-3\cdot n\ +1$

同じ色の枠は

プラスマイナスが

消しあって　　　**合計**は、

$n^3-0^3=$	$3\cdot(1^2\ +2^2\ +3^2+\ \cdots+n^2)$ $-3\cdot(1+2+3+\qquad+n)$ $+1\cdot n$

$$(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

$$n^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$
$$-3\cdot(1+2+3+\quad+n)\quad+n$$

$$=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$
$$-3\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}\quad+n$$

$$=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$
$$-\left\{\frac{3}{2}n(n+1)\right\}+n$$

両辺に 2 をかけて

$$2n^3=6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$
$$-\{3n(n+1)\}+2n$$

区分求積法

$$2n^3 = 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$- \{3n(n+1)\} + 2n$$

左辺と右辺を入れ替えて

$$6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$- \{3n(n+1)\} + 2n = 2n^3$$

上の式を整理すると

$$6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$= 2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n$$

$$= 2n^3 + 3n^2 + n$$

$$= n(2n^2 + 3n + 1)$$

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

これで、

自然数の２乗の和は求められました。

面積を求める式は次の通りでした。

$\frac{1}{n^3}\times(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+\cdots+n^2)$

$=\frac{1}{n^3}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$(n)(n+1)(2n+1)$$

のそれぞれの括弧内を

n でわると$\left(\frac{n}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$

となります。

n を無限大にすると

$\frac{1}{n}$は、

ほぼゼロとみなすことが出来ますので、

$$(1)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$$

$$=\frac{1}{n^3}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}\times 2$$

$$=\frac{1}{3}$$

この値は、

$y = x^2$ を積分した $\frac{1}{3}x^3$

を０から１までの定積分した値と等しくなります。

微分の逆で計算する積分では

$$\int_0^1 x^2 \ \mathrm{dx}$$

$$= \ [\frac{1}{3}\mathrm{x}^3]^1$$

区分求積法に比べて
なんとカンタンに求められることか
驚くべきですね。

区分求積法は嫌ですね。

昔の人は根気強かったですね。